

CAPÍTULO

9

Equações
Diferenciais**Objetivos Deste Capítulo**

1. Explicar a característica de uma equação diferencial
2. Entender o que significa solução particular e geral de uma equação diferencial
3. Definir os termos ordem e grau e aplicá-los às equações diferenciais
4. Aplicar o método de mudança de variável
5. Definir e resolver equações diferenciais exatas e definir o termo fator de integração.
6. Encontrar a regra geral para equações diferenciais lineares de primeira ordem
7. Resolver equações diferenciais de segunda ordem e resolver equações diferenciais simultâneas
8. Aprender os comandos do Maple para resolver equações diferenciais analiticamente e numericamente

Comandos do Maple Usados Neste Capítulo

Este capítulo contém mais comandos que o normal, mas a maior parte deles já foi usada anteriormente. Os únicos comandos novos são *dsolve*, *Deplot*, *odeplot* e *laplace*. Outros não tão comuns são incluídos para uma comodidade de referência.

`(D@@)(y);` A terceira derivada na forma de operador.

`assume(k>0);` Instituir restrições a uma variável.

`collect(deq99b, du);` Reunir termos contendo *du*.

`convert((D@@#)(y)(t), diff);` Converter de *D* para *diff*.

`convert(student(isolate`
`(expr, radical);` Converter da forma `RootOf` para o radical.

`D[1](f);` A derivada parcial de `f` em relação ao seu primeiro argumento.

`Detools[Deplot](deq915, y(x),`
`x = 1 .. 10, [[ic915]], y = 0 .. 12,`
`dirgrid=[10, 10], color=black,`
`linecolor=COLOR(RGB, 0, 0, 0),`
`scaling=constrained, stepsize=0.1);` O comando `Deplot` com algumas de suas opções.

`diff(y(x), x$2) + diff(y(x), x) -`
`6*y = 18;` Uma equação diferencial linear de segunda ordem.

`dsolve((deq96, y(x))` O comando `dsolve` que é fundamental para resolução de equações diferenciais.

`dsolve({deqn, IC}, y(x),`
`type = numeric);` A forma do comando `dsolve` quando é desejada uma solução numérica para uma equação diferencial.

`eliminate({so194a, d1}, c);` Elimina a variável `c` de duas equações.

`eval(subs(os, deq2));` A já familiar combinação de comandos para substituir um valor em uma expressão e convertê-lo à forma decimal.

`expand(dx*subs(diffy(x), x) =`
`dy/dx, deq96));` O comando `expand` aplicado em um termo que contém `diff`.

`intrans[laplace](ex922, t, s);` O comando do Maple para realizar a transformação de Laplace de uma expressão.

`op(1, op(2, d1)) = 0;` O comando `op`, útil para selecionar termos de listas ou conjuntos, quando você só precisa de uma parte da resolução.

`plots[display]({p1, p2});` Os plots podem ter opções diferentes. Este comando permite dois plots, cada um com uma opção diferente, para que sejam mostrados juntos.

`plots[implicitplot]({family},`
`x = 0 .. 10, y = -10 .. 10,`
`color=black);` Plota um conjunto de funções implícitas juntas.

```
plots[odeplot](nso1920, [t, v(t)],
0 .. 10, labels=['t', 'v(t)'],
color=black); Plota a solução de uma equação diferencial que foi resolvida
numericamente.
```

readlib(eliminate); O comando *eliminate* tem de ser carregado antes de ser usado.

```
simplify(diff(lhs(sol93), x) –
lhs(deq93)); Outra série de comandos bem úteis.
```

student[isolate](sol912, y(x)); Comando similar ao solve, que isola a variável neste caso y(x).

O Que É Uma Equação Diferencial?

Uma *equação diferencial* é uma equação que contém derivadas ou diferenciais. Toda vez que escrevemos uma fórmula para uma derivada nos capítulos anteriores, estávamos escrevendo uma equação diferencial. Não tenha a impressão de que o tópico de equações diferenciais é trivial apenas porque toda a fórmula para uma derivada é tecnicamente uma equação diferencial. Existem tipos de equações diferenciais muito mais desafiadoras do que aquelas que podem ser resolvidas simplesmente tirando a derivada de uma função elementar. As duas equações seguintes são diferenciais.

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x) = \cos(x) \quad (9-1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) + y(x) = 2 \cos(x) \quad (9-2)$$

No primeiro caso, uma solução para 9-1 é obviamente $y(x) = \sin(x)$, enquanto a solução para 9-2 não é tão óbvia até darmos uma estudada na situação. Vamos ver a ponta do iceberg que é este assunto, muito útil, diga-se de passagem, que estudaremos neste capítulo. Como as integrais, equações diferenciais podem não ter solução em termos de funções elementares. Mesmo que a solução em termos destas funções exista, o Maple pode não conseguir encontrar. Ou ainda, o Maple pode apresentar uma solução que você tenha dificuldades em interpretar. O assunto apresenta várias possibilidades, mas é importante dizer que cada campo de estudo apresenta apenas alguns tipos de equações diferenciais e que estas podem ser estudadas intensivamente.

Antes de entrarmos nas técnicas de solução, precisamos de algumas definições. Elas vão nos ajudar a discutir sobre os vários tipos de equações diferenciais. Algumas técnicas padrão requerem que

a equação seja escrita na forma diferencial, mas o Maple não possui um mecanismo para diferenciais. Teremos de escrever nossas equações usando derivadas quando pedirmos ao Maple para nos ajudar a resolvê-las. Existem duas classes de equações diferenciais. Este capítulo discutirá apenas *equações diferenciais ordinárias*, que são aquelas que contêm apenas uma variável independente. Se uma equação diferencial contém derivadas parciais, então é chamada de *equação diferencial parcial*; tais equações contêm mais de uma variável independente. Se há uma única variável independente, como x em $y = f(x)$, então a derivada parcial $\frac{\partial y}{\partial x}$ é idêntica à derivada ordinária $\frac{dy}{dx}$. Já que discutimos principalmente exemplos de uma única variável independente neste livro, não entramos muito no mérito da maneira em que o Maple representa seu símbolo de derivada como uma derivada parcial.

A *ordem* de uma equação diferencial é a mesma da derivada de maior ordem na equação. O *grau* de uma equação diferencial é o grau algébrico do seu termo de maior ordem. Uma *equação diferencial linear* de ordem n é do primeiro grau na variável dependente e suas derivadas, e sua maior derivada é de ordem n . Considere os exemplos seguintes:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (9-3a)$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (9-3b)$$

$$a_3(x)\frac{d^3y}{dx^3} + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \quad (9-3c)$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (9-3d)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + P(x)y = Q(x) \quad (9-3e)$$

$$r\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left[1\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right](y) = y^3(3x^4 + 2x^2 + x + 1) \quad (9-3f)$$

A equação 9-3a é uma equação diferencial expressa na forma de diferenciais. Ela é equivalente a $M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$; logo, é de primeira ordem e linear e, então, de primeiro grau. A variável independente, $y(x)$, não aparece, mas a equação poderá ser induzida ao formato linear se adicionarmos o termo y , o qual, após um re-arranjo, produz $\frac{dy}{dx} + 0y = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$, mostrando que esta é na verdade uma equação diferencial linear de primeira ordem e que a equação 9-3d é uma equação não-linear de primeira ordem (mas, ainda de primeiro grau).

A equação 9-3e é de primeira ordem mas de segundo grau e, portanto, não-linear. Finalmente, a equação 9-3f é de segunda ordem e segundo grau (não 3ª, ainda que o primeiro termo da derivada seja elevado à terceira potência). É decididamente não-linear.

A aparição de qualquer um dos termos $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ ou y^3 torna a equação diferencial não-linear.

Uma forma mais generalizada de escrever uma equação diferencial de primeira ordem é através da relação $F(x, y, y')=0$ onde $y'=dy/dx$. Similarmente, a equação de segunda ordem pode ser descrita pela relação $F(x, y, y', y'')$, onde $y''=d^2y/dx^2$. Uma solução para a equação diferencial é a relação $f(x, y)=0$ de forma que satisfaça à equação diferencial original. Infelizmente, esta notação não pode ser usada no Maple, pois o apóstrofo causa erro de sintaxe se for usado neste contexto.

Uma Nota de Notação

O Maple escreve todas as usas derivadas como derivadas parciais, até no caso da derivada da função de apenas uma variável independente. Portanto, usaremos as duas notações alternadamente.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \dots$$

Exemplo 9-1

Forneça a ordem e o grau desta equação diferencial.

$$2\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} y\right)^3 + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} y\right) + x^2\left(\frac{\partial}{\partial x} y\right) = A \sin(x)$$

Resolução: Tanto a ordem quanto o grau são 3, já que a derivada de maior ordem é $\frac{\partial^3}{\partial x^3} y$ e aparece na terceira potência (3º grau).

Sua vez. Dê a ordem e o grau de

$$2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} y\right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} y\right)^6 + x^2\left(\frac{\partial}{\partial x} y\right) = A \sin(x)$$

Resposta: _____

Soluções Particulares e Gerais Para Equações Diferenciais

Por definição, a solução de uma equação diferencial satisfaz à equação original. O fato de termos encontrado uma solução não significa que não há outras. A *solução geral* envolve todas as soluções possíveis. Quaisquer das soluções restritas são chamadas *soluções particulares*.

Já foi falado que $y = \sin(x)$ é uma solução para a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$, mas é uma solução particular. A solução geral de $y = \sin(x) + C$, onde C é a constante. Qualquer valor de C satisfaz à equação diferencial desde que sua derivada em relação a x seja 0.

Condições Iniciais e Condições de Contorno

Já que a constante de integração é introduzida cada vez que uma integração é realizada na solução, uma equação diferencial de primeira ordem contém uma constante arbitrária, a de segunda ordem contém duas constantes independentes e assim por diante. A ordem da equação diferencial determina o número de constantes independentes. Uma outra informação que é necessária para determinar os valores destas constantes é chamada *condição inicial* (ou condições). Em casos mais complicados, a informação pode não ser um valor inicial, mas um valor em algum outro lugar ou outra hora. Neste caso, elas são chamadas *condições de contorno*. Condições iniciais e condições de contorno são valores conhecidos da solução para as equações diferenciais que podem ser usados para determinar os valores de constantes arbitrárias de integração na solução geral.

Exemplo 9-2

Demonstre que

$$Y = -3 + C_1 e^{(2x)} + C_2 e^{(-3x)}$$

é uma solução para a equação diferencial

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} y \right) - 6y = 18$$

Resolução: Defina a equação e sua solução proposta no Maple.

```
>deq2 := diff(y(x), x$2) + diff(y(x), x) - 6*y = 18;
```

$$\text{deq2} := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) - 6y = 18$$

```
>ps := y(x) = -3*_C1*exp(2*x) + _C2*exp(-3*x);
```

$$\text{ps} := y(x) = -3 + _C1 e^{(2x)} - _C2 e^{(-3x)}$$

Substitua a solução na equação diferencial

```
>subs(os, deq2);
```

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} (-3 + _C1 e^{(2x)} + _C2 e^{(-3x)}) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} (-3 + _C1 e^{(2x)} + _C2 e^{(-3x)}) \right) + 18 - 6_C1 e^{(2x)} - 6_C2 e^{(-3x)} = 18$$

Se você der uma olhada na última equação, verá que tudo que o Maple fez foi substituir y com a função proposta de x, mas não fez nenhuma avaliação nas derivadas. Usaremos eval para realizá-las.

```
>eval(subs(os, deq2));
```

$$18=18$$

A equação diferencial é satisfeita e portanto a solução proposta é realmente a única solução particular. Na verdade, esta é a solução geral. Variando as duas constantes $_C1$ e $_C2$, todas as soluções possíveis desta equação serão obtidas.

Algumas equações diferenciais podem ser melhor resolvidas usando a relação da forma $F(x, y) = 0$ em vez da função. Neste caso, existem várias soluções para a equação diferencial.

Exemplo 9-3

Demonstre que $xy(x) - x^2 + \ln(y(x)) = c$ é uma solução para a equação diferencial abaixo

```
>deq93 := (x+1/y(x))*diff(y(x), x)+y(x) - 2*x = 0;
```

$$\text{deq93} := \left(x + \frac{1}{y(x)} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) + y(x) - 2x = 0$$

Resolução: Defina a suposta solução como

```
>sol3 := x*y(x)-x^2+ln(y(x)) = c;
```

Vamos tirar a derivada do lado esquerdo de sol93 implicitamente e comparar à equação diferencial. Obviamente, a derivada do lado direito de sol93 é 0, assim como a equação diferencial. Após a simplificação, a diferença entre o lado esquerdo de sol93 e deq93 é 0, mostrando que elas são idênticas, portanto sol93 satisfaz deq93.

>simplify(diff(lhs(sol93), x)-lhs(deq93));

0

Foi possível verificar que a função proposta de x no exemplo 9-3 era realmente a solução para a equação diferencial deq93. Geralmente, as coisas não são tão fáceis. Para verificar a solução, você deve tirar sua derivada e compará-la à equação diferencial. A dificuldade aparece na hora de eliminar a constante arbitrária, que pode estar profundamente enterrada na equação $F(x, y, y', c) = 0$ obtida pela diferenciação implícita. Mostraremos dois casos. A primeira nos leva a nossas manipulações, visto que a segunda mostra as dificuldades que podemos encontrar.

Exemplo 9-4

(a) Demonstre que a equação diferencial

>dqe94a := x*diff(y(x), x) - 2*y(x) = 0;

$$\text{deq94a} := x \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) - 2y(x) = 0$$

tem a solução

>sol94a := y(x) = c*x^2;

$$\text{sol94a} := y(x) = x^2 c$$

(b) Aplique o procedimento anterior a

>deq94b := diff(y(x), x) - ((y(x) - 2)/x)^2 = 0;

$$\text{deq94b} := \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) - \frac{(y(x) - 2)^2}{x^2} = 0$$

para demonstrar que a solução é

>sol94b := y(x) - 2 - x/(1+c*x) = 0;

$$\text{sol94b} := y(x) - 2 - \frac{x}{1 + xc} = 0$$

Resolução:

(a) Ache a derivada da solução suposta. Desta vez vamos tirar a derivada de toda a equação de uma vez, já que o comando *diff* suporta esta opção.

>d1 := diff(sol94a, x);

$$d1 := \frac{\partial}{\partial x} y(x) = 2xc$$

A derivada também contém a constante *c*. Nós temos duas equações contendo *c*, exatamente *d1* e *sol94a*. A função *eliminate* da biblioteca pode ser usada para eliminar *c*.

>readlib(eliminate);

>eliminate({sol94a, d1}, c);

$$\left\{ c = \frac{y(x)}{x^2} \right\}, \left\{ -x \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) + 2y(x) \right\}$$

A segunda expressão é a expressão pedida com o *c* eliminado. A expressão é igualada a zero e podemos ver que é idêntica a *deq94a*.

(b) Aplique os mesmos passos da parte (a) para obter

>d2 := diff(sol94b, x);

$$d2 := \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) - \frac{1}{1+xc} + \frac{xc}{(1+xc)^2} = 0$$

>a := eliminate({sol94b, d2}, c);

$$\left\{ c = \frac{y(x)+2+x}{x(y(x)-2)} \right\}, \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) x^2 - y(x)^2 + 4y(x) - 4 \right\}$$

A segunda expressão, igualada a zero, deveria ser a mesma que a equação diferencial *deq94b*, mas parece diferente. Subtrair esta expressão do lado esquerdo de *deq94b* também não vai ajudar muito, pois, analisando cuidadosamente a expressão em *a*, você pode descobrir que é um múltiplo do lado esquerdo de *deq94b*. Isto faz uma diferença essencial, porque multiplicar 0 por qualquer outra coisa dá zero. Selecionar a segunda expressão em *a* requer o uso do comando *op* porque a expressão é dada como um conjunto de um elemento. Precisamos selecionar o primeiro elemento do segundo conjunto em *a* usando o comando *op* (1, a[2]). Realizando esta tarefa, podemos confirmar a igualdade da expressão em *a* e do lado esquerdo de *deq94b* da seguinte forma:

>simplify(op(1, a[2])/x^2-lhs(deq94b));

0

A equação *sol94b* é uma solução de *deq94b*, mas deu um certo trabalho provar isto. Este é na verdade o caso mais representativo. Geralmente, é necessário um estudo minucioso para demonstrar que uma solução proposta é realmente a solução para a equação diferencial.

Veremos vários exemplos em PP9-3 para ajudá-lo a verificar se a solução proposta realmente satisfaz à equação diferencial. Já que a verificação é um

passo tão importante, certifique-se de que você sabe aplicar o método do papel e lápis tanto quanto o método do Maple.

Convertendo uma Equação Algébrica em uma Equação Diferencial

Sempre é possível formar uma equação diferencial de qualquer equação dada. A ordem da equação diferencial será igual ao número de constantes arbitrárias da equação dada.

Exemplo 9-5

Ache a equação diferencial cuja solução é

$$>\text{sol95} := (1-x) - c*(1-y(x)) = 1;$$

$$\text{sol95} := 1 - x - c(1 - y(x)) = 1$$

Resolução: Tire a derivada da equação sol95:

$$>d := \text{diff}(\text{sol95}, x);$$

$$d := -1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) c = 0$$

Elimine c.

$$>d1 := \text{eliminate}(\{\text{sol95}, d\}, c);$$

$$d1 := \left\{ c = \frac{x}{-1 + y(x)} \right\}, \left\{ 1 - y(x) + x \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) \right\}$$

A equação diferencial pedida é

$$>\text{op}(1, \text{op}(2, d1)) = 0;$$

$$1 - y(x) + x \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) = 0$$

Sua vez. Ache a equação diferencial cuja solução é

$$>\text{sol95a} := (1+x) - c*(1+y(x)) = 1;$$

$$\text{sol95a} := 1 + x - c(1 + y(x)) = 1$$

Resposta: _____

Equações que contêm parâmetros ajustáveis, assim como sol95 no exemplo 9-5, definem o que é conhecido a respeito de uma *família de curvas*. A família pode ser visualizada no

gráfico. Gere uma sequência de 10 curvas dando a c dez valores espaçados e plotando todos no mesmo gráfico (Figura 9.1):

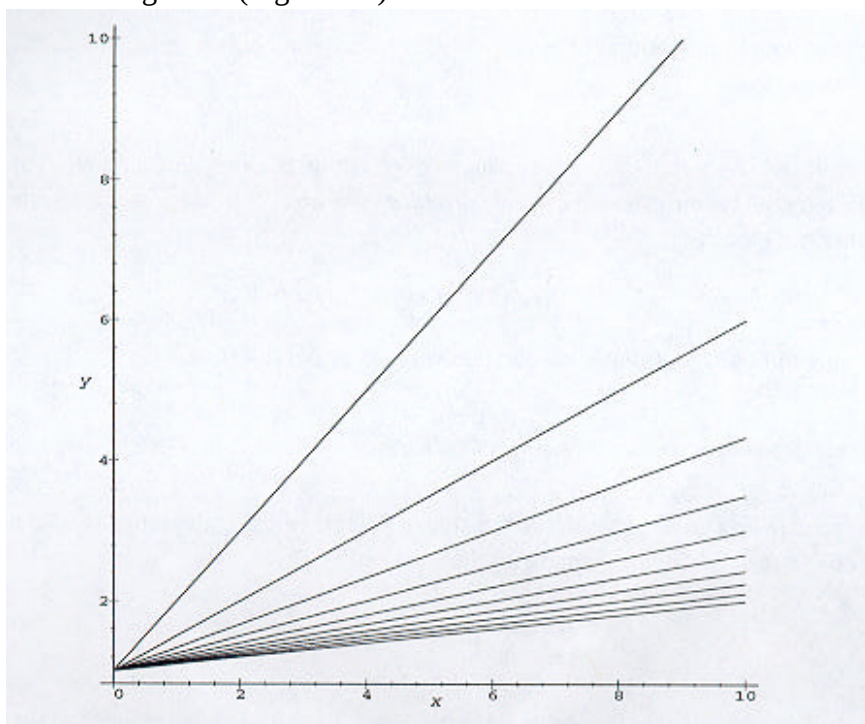


Figura 9.1 A família de curvas formada por diferentes valores de c em $(1+x) - c*(1+y(x)) = 1$

```
>family := seq(sol95, c = 1 .. 10);
```

```
>plots[implicitplot]({family}, x = 0 .. 10, y = -10 .. 10, color = black);
```

Um dos grandes benefícios de usar o Maple é a habilidade de gerar tais gráficos. Você pode mudar os valores do parâmetro c para algo diferente, digamos valores negativos de -10 a -1 , e ver que mudança isto faz na figura. Você pode ver facilmente o efeito que a mudança de parâmetro tem em sua solução uma vez que você tenha esta solução.

Variáveis Separáveis

A equação diferencial de primeira ordem

$$Q(x, y) \frac{dy}{dx} = -P(x, y) \quad (9-4a)$$

pode ser escrita em forma diferencial

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (9-4b)$$

Se P e Q são expressáveis como produtos de uma função de x apenas e uma função de y apenas, a equação diferencial é dita ter variáveis separáveis. Se P e Q são fatoráveis desta maneira, temos

$$f(x)g(y)dx + h(x)k(y)dy = 0 \quad (9-5a)$$

Dividindo por $g(y)h(x)$, temos, admitindo $g(y)h(x) \neq 0$,

$$\frac{f(x)}{h(x)}dx + \frac{k(y)}{g(y)}dy = 0 \quad (9-5b)$$

Cada termo na Equação 9-5 é o diferencial de uma única variável; portanto, podemos integrar termo por termo para obter a fórmula da solução:

$$\int \frac{f(x)}{h(x)}dx + \int \frac{k(y)}{g(y)}dy = c \quad (9-5c)$$

A equação diferencial deve ser resolvida quando for reduzida à forma da Equação 9-5c, mesmo que as integrais não existam em termos de um número finito de funções elementares, desde que possa ser provado que estas integrais existam.

Exemplo 9-6

Use o Maple e o método de separação de variáveis para achar a solução da equação diferencial:¹

>deq96 := a*(x*diff(y(x), x)-2*Y(x)) = x*y(x)*diff(y(x), x);

$$\text{deq} := a \left(x \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) - 2y(x) \right) = xy(x) \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right)$$

Então, use o Maple para resolver a equação diferencial e verificar ambos os resultados.

Resolução: Para aplicar a técnica de separação de variáveis, precisamos de alguma forma contornar o fato de que o Maple não entende diferenciais. O truque é substituir a razão de dois desconhecidos dy e dx pela derivada e multiplicar por dx . E, enfim, expandimos o resultado para unir os termos posteriormente.

1. Lembre-se de emitir o comando $a := 'a'$; para se assegurar de que a é indefinido, já que foi definido no exemplo anterior.

```
>deq96a := expand(dx*subs(diff(y(x), x) = dy/dx, deq96));
```

$$\text{deq96a} := a x dy - 2dx a y(x) = x y(x) dy$$

Para unir os termos em dx em um lado da equação e em dy do outro lado, usaremos a seguinte sintaxe, à qual você já deve ser bem familiar:

```
>deq96b := ((a*x*dy = a*x*dy) - deq96a)/(y(x)*x);
```

$$\text{deq96b} := 2dx \frac{a}{x} = \frac{axdy - xy(x)dy}{xy(x)}$$

O resultado pode ser simplificado mas, desta vez, precisamos aplicar o comando simplify em cada lado separadamente.

```
deq96c := lhs(deq96b) = simplify(rhs(deq96b));
```

$$\text{deq96c} := 2 \frac{dxa}{x} = \frac{dy(a - y(x))}{y(x)}$$

Observe que nós realizamos a separação das variáveis. O lado esquerdo da equação *deq96c* contém termos apenas em dx e x, enquanto o lado direito contém apenas termos em y(x) e dy. Logo, os dois lados podem ser integrados. Nós lembramos de fornecer a constante de integração. Este é um passo que requer concentração, já que foi copiada em vez de deixar o Maple gerar a partir de *deq96c*. A razão já foi dita: o Maple não entende diferenciais, logo precisamos escrever a equação no padrão do Maple para integrais.

```
>sol96a := int(2*a/x, x) = subs(y = y(x), int((a-y)/y, y))+C;
```

$$\text{sol96a} := 2^a \ln(x) = -y(x) + a \ln(y(x)) + C$$

Nós obtivemos a solução pela aplicação de um dos métodos-padrão, principalmente, separação de variáveis (veja Figura 9.2). O Maple tem o seu próprio mecanismo para resolver equações diferenciais, chamado *dsolve*. Para usá-lo, você tem de dar a equação diferencial e nomear a função pela qual deve ser resolvida, neste caso, *y(x)*.

```
>sol96b := dsolve(deq96, y(x));
```

$$\text{sol96b} := -\frac{1}{2} \ln(y(x)) + \frac{1y(x)}{2a} + \ln(x) = _C1$$

Novamente as duas soluções, *sol96a* e *sol96b*, parecem diferentes. Podemos tirar as derivadas das duas e compará-las com a equação dada, *deq96*.

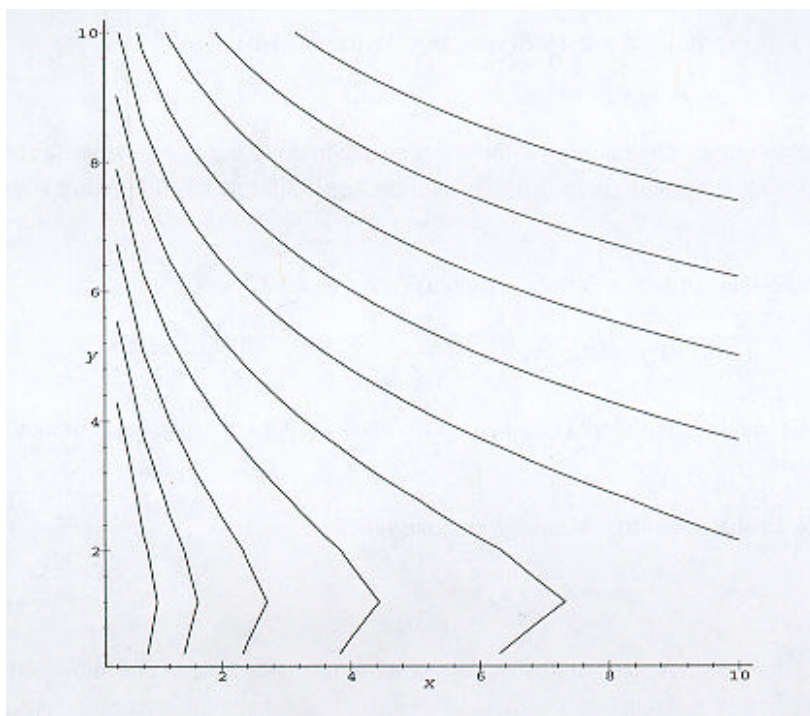


Figura 9.2 A família de curvas para *sol96a*

>simplify(diff(sol96a, x));

$$2 \frac{a}{x} + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) (a - y(x))}{y(x)}$$

>simplify(diff(sol96b, x));

$$-\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) ax - xy(x) \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) - 2y(x)a}{y(x)ax} = 0$$

É mais fácil ver que a primeira destas equações é equivalente a *deq96*, mas algumas multiplicações e simplificação mais a fundo mostram que a segunda também é uma solução. Existe outra maneira de verificar se as duas soluções são a mesma; não prova que as duas equações são iguais, mas fornece uma evidência forte de que são. Desta forma, produz uma prova a mais em seu trabalho que pode vir a ser importante e te dá uma imagem do comportamento da solução. Forme a família de curvas, assim como fizemos no exemplo 9-5 (Figura 9.3).

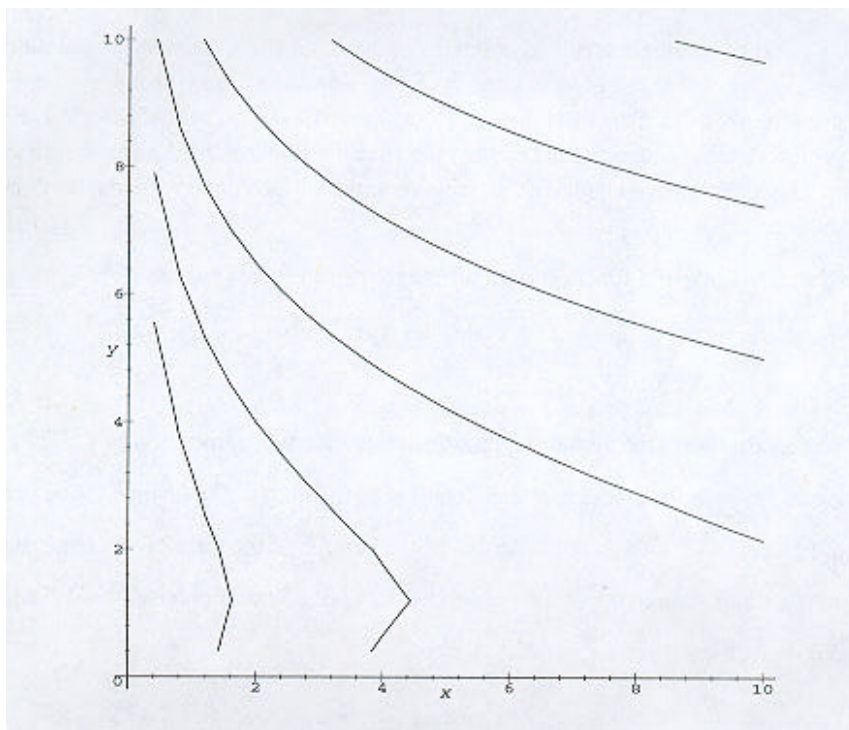


Figura 9.3 A família de curvas para *sol96*

```
>family := seq(subs(a = 1, sol96a), C = 1 .. 10);
>plots[implicitplot]({family}, x = 0 .. 10, y = -10 .. 10, color = black);
>family := seq(subs(a = 1, sol96b), C = 1 .. 10);
>plots[implicitplot]({family}, x = 0 .. 10, y = -10 .. 10, color = black);
```

Há uma observação importante a ser feita antes de tentarmos comparar os dois gráficos. As constantes nas duas equações não são iguais! Não há necessidade de $_C1$ ser igual a C . Em outras palavras, um valor de $_C1$ pode corresponder a um valor diferente de C , ainda assim dando o mesmo gráfico. Na verdade, parece que o valor de $_C1 = 1$ produz praticamente a mesma curva que $C = 2$. Enfim, as famílias das curvas parecem a mesma, apesar de que valores diferentes das constantes tiveram de ser usados para que a Figura 9.3 pareça idêntica à Figura 9.2.

Mudança Elementar de Variável

Duas das idéias mais poderosas da matemática estão embutidas nas frases, “Que x seja uma variável que denota a quantidade” e “Substituir uma função de x por x em uma dada expressão”.

É a segunda destas frases que nos interessa aqui. Dada uma equação diferencial com aparente dificuldade de se resolver, uma mudança de variável apropriadamente escolhida pode produzir uma equação bem mais fácil de se resolver. Uma vez que fazemos disponível a solução da equação transformada, a equação da mudança de variável pode ser usada para encontrar a solução para a equação diferencial original. A técnica de mudança de variável requer uma fluência elementar em diferenciação parcial.

A derivada parcial de uma função $z = f(x, y)$ em relação a x é escrita assim

$$f_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \quad (9-6)$$

O Maple usa uma variação da equação do meio em Equação 9-6, exatamente $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$. A derivada parcial de $f(x, y)$ em relação a x é compreendida como a razão da mudança da função para uma pequena mudança em x , com y mantido constante. Similarmente, $\frac{\partial f}{\partial y}$ é a razão da mudança da função para uma pequena mudança em y , com x mantido constante. Para ser mais preciso, a definição das derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (9-7 a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (9-7 b)$$

Derivadas parciais são calculadas exatamente da mesma forma como as demais. Se a derivada parcial deve ser tirada em relação à derivada independente x , então todos os outros termos na expressão, constantes ou independentes, são tratados como constantes por propósitos de realizar a diferenciação.

Exemplo 9-7

Ache as seguintes derivadas parciais:

- (a) $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \text{ se } f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$
- (b) $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y), \text{ se } f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$
- (c) $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \text{ se } f(x, y) = x^2 + y^2$

$$(d) \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \text{ se } f(x, y) = \frac{x}{y} + \ln(y)$$

$$(e) \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \text{ se } f(x, y) = x^2 - y^2 e, x = 1 - y$$

Resolução:

>diff(x^2+2*x*y+y^2, x);

$$2x+2y$$

Já que y é independente de x , não escrevemos $y(x)$ na linha de inserção do Maple e sim, simplesmente, y . Isto informa ao Maple que y é uma variável independente. O processo de diferenciação do Maple trata y como uma constante, produzindo o resultado correto.

(b) Chegamos a resposta idêntica se esta resposta for diferenciada em relação a y :

>diff(x^2+2*x*y+y^2, y);

$$2x+2y$$

Por conta da simetria da função, uma pequena mudança produz a mesma mudança na função com uma pequena mudança em y .

(c) Aqui demonstramos o método como o operador para achar a derivada parcial. Defina x^2+y^2 como uma função:

>f := (x, y)-> x^2 + y^2;

$$f := (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$$

Quando você usa o operador D do Maple, é necessário especificar a variável. Isto é feito pela ordem de aparição de x e de y na definição da equação. A variável x aparece primeiro; então a forma de especificar a derivada da função em relação a x é

>D[1](f);

$$(x, y) \rightarrow 2x$$

A resposta aparece em forma de função. Perceba que a derivada em relação a y , $D[2](f)$, é $(x, y) \rightarrow 2y$, um resultado diferente. Desta vez, as duas derivadas parciais são a mesma só que $x = y$.

(d)Retornando à notação *diff* para este problema, o comando do Maple é

>diff(x/y + ln(y), x);

$$\frac{1}{y}$$

Já que y é tratado como uma constante, não tem problema de aparecer no segundo termo como $\ln(y)$, pois a derivada de $\ln(y)$ em relação a x ainda é zero.

(e)Neste exemplo, x não é uma variável independente, mas é função de y . Logo, uma vez que fazemos a substituição $x = 1-y$, $f(x, y)$ se torna

>f(x, y) = subs(x = 1-y, x^2-y^2);

$$f(x, y) = (1-y)^2 - y^2$$

e não é mais uma função de x . A derivada da função em relação a y é

>diff((1-y)^2-y^2, y);

Por que? Bem, a expressão $(1-y)^2 - y^2$ pode ser simplificada em $1-2y$; então a derivada em relação a y é apenas -2 .

(a) $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \text{ se } f(x, y) = e^{(xy)} + y^2 + 3$

Resposta:_____

(b) $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y), \text{ se } f(x, y) = e^{(xy)} + y^2 + 3$

Resposta:_____

(c)Calcule (a) $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ em $x = 1, y = 1$, e depois compare a $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, determinando $\Delta x = 0.001$ na equação 9-7^a. (Não tire o limite; simplesmente encontre o valor da razão para $\Delta x = 0.001$.)

Resposta:_____

A Diferencial Total

A *diferencial total* de uma função $f(x, y)$ é definida como

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (9-8)$$

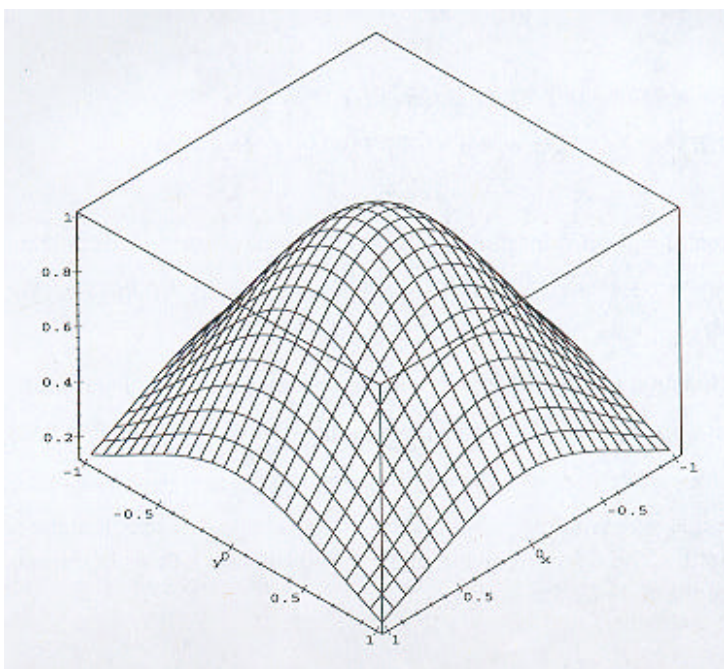


Figura 9.4 A função $f(x, y)$ mostrando as linhas de contorno nas direções x e y

Esta é a soma das derivadas parciais em relação a ambos x e y , multiplicado por suas respectivas diferenciais. Imagine a superfície gerada pelo plot de $f(x, y)$, assim como aquele da Figura 9.4. Quando as linhas de contorno se interseccionam, elas formam pequenos retângulos com lados que podem ser compreendidos tendo comprimentos dx e dy . Escolha qualquer lugar na superfície, a altura do ponto na superfície é $f(x, y)$. Se você imaginar seguir a linha de contorno posicionando-se na direção do eixo x para a distância dx e tomando a linha do eixo y para a distância dy , você chegará a um novo lugar da superfície. A nova altura é $f(x+dx, y+dy)$ e a diferença na altura é $d(f(x, y)) = f(x+dx, y+dy) - f(x, y)$, que também é o diferencial total.

Exemplo 9-8

(a) Ache o diferencial total de $f(x, y) = 3y^3 - x^2y$ e então avalie em $x = 1 + 2\sqrt{2}\sqrt{5}$, $y = 1$, com $\Delta x = 0.001$ e $\Delta y = 0.001$.

(b) Calcule $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, onde $x, y, \Delta x$ e Δy têm os mesmos valores da parte (a). Você tem o mesmo resultado?

Resolução:

(a) Aplique a definição do diferencial total

```
>ex93 := diff(3*y^3-x^2*y, x)*dx+diff(3*y^3-x^2*y, y)*dy;
```

$$\text{ex93} := -2xydx + (9y^2 - x^2)dy$$

Depois, substitua os valores dados para x , y , dx e dy e converta para números decimais.

```
>evalf(subs(x = 1 + 2*sqrt(2)*sqrt(5), y = 1, dx = 0.001, dy = 0.001, ex93));
```

.05929822128

(b) Use a função sem tirar as derivadas e substitua os valores dados.

```
>evalf(subs(x = 1 + 2*sqrt(2)*sqrt(5), y = 1, dx = 0.001, dy = 0.001, ex93b));
```

.5930487

Novamente os resultados são coincidentes por cerca de quatro espaços. Esta é uma forte evidência; seriam ainda mais próximos se dx e dy fossem dados menores. Você pode verificar esta suposição facilmente, modificando o comando para isso.

Sua vez.

(a) Ache o diferencial total de $f(x, y) = 2x - 3y$ se $\Delta x = 0.003$ e $\Delta y = 0.002$.

(b) Calcule $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, se Δx e Δy tiverem os mesmos valores da parte (a). Você tem o mesmo resultado? Explique porque não é necessário saber os valores definidos de x e y aqui.

O Método de Mudança de Variáveis

Utilizando esta quantidade de conhecimentos a respeito de derivadas parciais e diferenciação total, já estamos prontos para aplicar a mudança de variável em problemas de equações diferenciais de primeira ordem. Para aplicar o método siga estes passos:

1. Escreva a equação na forma diferencial.
2. Faça uma estimativa na transformação da equação. Uma boa escolha é usar uma sub-expressão comum ou escolher a função inversa de alguma função aparente na equação original.
3. Escreva os diferenciais dy ou dx ou ambos, em termos das novas variáveis.
4. Resolva a nova equação em termos da nova variável (s).

5. Restaure as variáveis originais e. Isto significa que as equações para a mudança de variável deve poder ser invertida.

Exemplo 9-9

Resolva $(2x + 3y + 4)dx + (2x + 3y + 5)dy = 0$ pelo método de mudança de variáveis.

Resolução: Esta equação é facilmente resolvida com o comando *dsolve* do Maple, mas vamos fornecer uma resolução passo a passo usando o método de mudança de variáveis. Usamos os indeterminados dx e dy , que o Maple trata como uma variável qualquer. Até onde o Maple sabe, eles não são diferenciais.

```
>deq99 := (2*x+3*y+4)*dx + (2*x+3*y+5)*dy = 0;
```

```
deq99 := (2x + 3y + 4)dx + (2x + 3y + 5)dy = 0
```

A expressão $2x+3y$ ocorre duas vezes, logo um possível conjunto de equação de mudança de variável é

```
>cv1 := u = 2*x+3*y: cv2 := v = 3*y:
```

Resolvendo-as para x e y , mostramos que as equações podem ser invertidas:

```
>solve({cv1, cv2}, {x, y});
```

$$\left\{ y = \frac{1}{3}v, x = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v \right\}$$

Para estas equações, é obvio que os diferenciais totais são

```
>td1 := dx = 1/2*du - 1/2*dv; td2 := dy = 1/3*dv;
```

$$td1 := dx := \frac{1}{2}du - \frac{1}{2}dv$$

$$td2 := dy = \frac{1}{3}dv$$

A equação diferencial transformada é

```
>deq99a := subs(x = 1/2*u - 1/2*v, y = 1/3*v, td1, td2, deq99);
```

$$deq99a := (u + 4) \left(\frac{1}{2}du - \frac{1}{2}dv \right) + \frac{1}{3}(u + 5)dv = 0$$

Simplificamos e unimos os termos:

```
>deq99b := simplify(deq99a);
```

$$deq99b := \frac{1}{2}udu - \frac{1}{6}udv + 2du - \frac{1}{3}dv = 0$$

```
>deq99c := collect(deq99b, du);
```

$$\text{deq99c} := \left(\frac{1}{2}u + 2 \right) du - \frac{1}{6}u dv - \frac{1}{3}dv = 0$$

>deq99d := collect(deq99c, dv);

$$\text{deq99d} := \left(-\frac{1}{6}u - \frac{1}{3} \right) dv + \left(\frac{1}{2}u + 2 \right) du = 0$$

>deq99e := op(1, lhs(deq99d))/(-1/6*u-1/3)+simplify(op(2, lhs(deq99d))/(-1/6*u-1/3))=0;

$$\text{deq99e} := dv - 3 \frac{(u+4)du}{u+2} = 0$$

Lembre-se de que a maioria dos comandos desta sequência foram gerados copiando e colando. Pouca digitação foi necessária. E também o último comando foi apenas adicionar o comando *simplify* à resposta do Maple. Logicamente, este comando tornaria a equação final mais simples.

Em *deq99e*, as variáveis são separadas e podemos integrar termo por termo. Já que o Maple não entende que *dv* e *du* são diferenciais, precisamos usar os integrandos, manualmente ou com o comando *op*. Neste caso, é bem mais fácil copiar o segundo integrando, para *dy*, ao invés de tentar escolher os fatores usando o comando *op*.

Ainda assim, mostraremos como fazer com o comando *op*.

>I99 := Int(1, v)+Int(op(1, op(2, op(1, deq99e)))*op(2, op(2, op(1, deq99e)))*op(4, op(2, op(1, deq99e))), u) = C;

$$\text{I99} := \int 1 dv + \int -3 \frac{u+4}{u+2} du = C$$

Realizando estas integrais, achamos a solução para a equação diferencial em termos de variáveis transformadas.

>sol99a := value(I99);

$$\text{sol99a} := v - 3u - 6 \ln(u+2) = C$$

Tudo que restar é para re-escrever a equação em termos das variáveis originais.

>sol99 := subs(cv1, cv2, sol99a);

$$\text{sol99sv} := -6y - 6x - 6 \ln(2x+3y+2) = C$$

Para demonstrar que *sol99sv* é realmente a solução, tiramos sua derivada em relação a *x*, mas primeiro devemos informar o Maple de que *y* é realmente *y(x)*.

>d0 := subs(y = y(x), sol00sv);

$$d0 := -6y - 6x - 6 \ln(2x + 3y(x) + 2) = C$$

>d1 := diff(lhs(d0), x)=0;

$$d1 := -6 \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) - 6 - 6 \frac{2 + 3 \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right)}{2x + 3y(x) + 2} = 0$$

Buscando a derivada, encontramos

>d2 := solve(d1, diff(y(x), x));

$$d2 := - \frac{3y(x) + 4 + 2x}{2x + 3y(x) + 5}$$

que é o mesmo valor para dy/dx que teríamos isolando dy/dx em *deq99*. Podemos, como verificação, usar *dsolve*.

Sua vez. Use *dsolve* na equação seguinte para mostrar que a solução é equivalente a *sol99*.

>deq99a := (2*x+3*y(x)+4) + (2*x+3*y(x)+5)*diff(y(x), x)=0;

$$\text{deq99a} := 2x + 3y(x) + 4 + (2x + 3y(x) + 5) \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) = 0$$

Resposta: _____

Interpretação Da Equação Diferencial de Primeira Ordem

Uma equação diferencial de primeira ordem pode ser resolvida para dy/dx e escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (9-9)$$

A Equação 9-9 diz que a inclinação é associada a cada ponto (x, y) para a função $f(x, y)$ que é definida. A equação diferencial pode ser usada os pequenos pedaços das linhas tangentes por todo o plano avaliando suficientes pares x, y . Se você começar em qualquer destes pequenos segmentos de tangente e desenhar uma linha dele ao seu adjacente, assim por diante, você construirá uma aproximação para uma curva de solução para a equação diferencial. Pegando um segmento que não é parte da curva e seguindo-o, outra solução é achada. Desta maneira, você pode construir uma família de curvas. Se você souber a condição inicial, você pode selecionar uma curva em particular que satisfaça esta condição.

Maple V4 tem um comando para plotar estes segmentos de tangente automaticamente. Daremos um exemplo do comando, aplicado a uma equação diferencial bem importante. Esta equação

modela crescimento e declínio. É derivada da observação de que, em alguns sistemas, a taxa de variação de uma quantidade depende apenas da quantidade existente a qualquer tempo dado. Em Biologia, a quantidade pode ser o número de bactérias num tanque de nutrientes. Se há apenas algumas bactérias comparado ao que o tanque pode suportar e há alimento o suficiente, a bactéria vai-se multiplicar sem problemas. Neste caso, o crescimento da nova bactéria vai depender apenas da quantidade de bactéria presente em um determinado tempo. Que $B(t)$ seja o número de bactérias a qualquer tempo t . A taxa de variação deste número é $dB(t)/dt$ e nosso modelo admite que isto é proporcional à quantidade presente. Escrevendo esta informação como uma equação diferencial, temos.

$$\frac{\partial}{\partial t} B(t) = k B(t) \quad \text{ou} \quad (9-10)$$

Taxa de variação = Constante de Proporcionalidade $\times$ Quantidade Presente

A mesma abordagem pode ser feita em sistemas nos quais uma quantidade está em decaimento. Um exemplo clássico é o decaimento de uma substância radioativa. Que $N(t)$ seja o número de átomos de uma substância radioativa no tempo t . A lei de decaimento radioativo (na maioria dos casos) diz que existe uma constante de probabilidade de que qualquer átomo vai-se deteriorar durante o próximo pequeno intervalo de tempo. Cada evento de deterioração é independente de qualquer outro. É como jogar um grande número de dados de 20 lados e observar quantos deles caem com a face de número 1 para cima. Estes são os átomos que se deterioraram durante o intervalo de tempo. Estes que caem com o lado 1 para cima são retirados e os dados são jogados novamente. O número de dados retirados em cada jogada depende de dois parâmetros, (a) o número de lados do dado, neste caso 20, e (b) o número de dados usados na jogada inicial. Substitua os átomos radioativos por dados e você tem o caso de decaimento radioativo.

Vamos considerar que existe um grande número de átomos radioativos em nossa amostra quando iniciamos a experiência. Por exemplo, 1 micro-grama de rádio puro contém cerca de 10^{15} átomos. O grande número de átomos justifica o uso de uma variável contínua $N(t)$ para aproximá-los. De nossa discussão você pode ver que a taxa de desintegração $dN(t)/dt$ é proporcional ao número de átomos no tempo t , multiplicado por alguma constante de proporcionalidade. A equação diferencial é

$$\frac{\partial}{\partial t} N(t) = -k N(t) \quad (9-11)$$

Introduzimos o sinal negativo explicitamente para indicar que haverá menos átomos à medida em que o tempo passe.

Então, considere um exemplo de eletrônica, um capacitor carregado é conectado a um resistor para formar um circuito completo. O resistor é caracterizado por um valor de resistência, R , em Ohms. A voltagem pelo capacitor é dada por $V(t) = q/C$, onde q é a quantidade de carga em

Coulombs em uma das placas do capacitor e C é a constante, chamada de capacitância, medida em farads. Se um capacitor carregado é conectado a um resistor, a corrente vai fluir. Corrente é definida como a taxa de variação de uma carga, dq/dt . A carga de uma placa do capacitor, através do resistor, até a outra placa do capacitor. A *lei de Ohm* diz que a voltagem pelo resistor está relacionada à taxa de variação da carga pela equação:

$$V(t) = R \frac{dq}{dt} \quad (9-12)$$

A mesma voltagem existe pelo capacitor, mas no sentido oposto; então temos uma equação relacionando as voltagens através do resistor e do capacitor.

$$V(t) = R \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C} \quad (9-13)$$

Aqui, a quantidade que está se deteriorando é carga elétrica. Movendo a constante R na Equação 9-13 para o lado direito da equação 9-14, temos

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC} q \quad (9-14)$$

A constante de proporcionalidade neste caso é $-1/RC$.

Investimentos

Como em nosso ultimo exemplo, derivamos a equação para o rendimento de dinheiro em um investimento que tem uma taxa de juros constante. Vamos chamar a quantidade de dinheiro no investimento de $P(t)$. Este é o valor do investimento a qualquer tempo t dado, em anos. Vamos admitir que os juros são calculados a cada instante. Já que o dinheiro está investido em um fundo que garante uma taxa de retorno constante, o crescimento é proporcional à quantidade atual da conta, e a equação diferencial é

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t) \quad (9-15)$$

Em todos estes exemplos, o ponto comum é o fato de que a taxa de variação de uma quantidade é proporcional à quantidade presente.

$$\frac{dy}{dx} = \pm ky \quad (9-16)$$

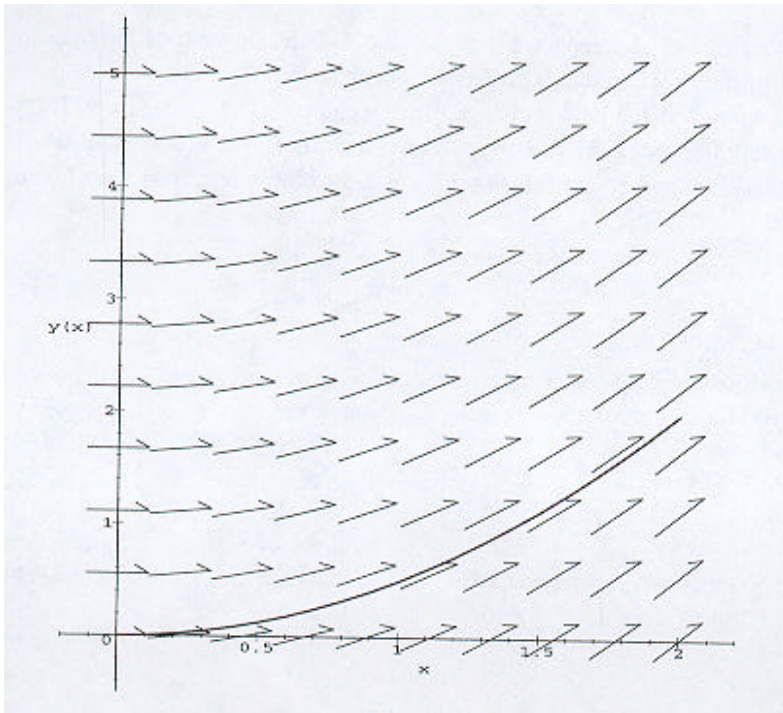


Figura 9.5 Campo de direção para $\frac{\partial}{\partial x} y(x) = kx$ com $k = 1$

A Equação 9-16 é uma das mais simples, ainda que uma das mais importantes. O objetivo central do estudo de equações diferenciais é encontrar as soluções gerais para as equações envolvendo derivadas. No caso da Equação 9-16, podemos plotar o campo de direção por determinar os valores de k (Figura 9.5). Primeiro que seja $k = 1$. O comando para plotar os pequenos segmentos de tangente para esta equação diferencial contém um certo número de parâmetros. Primeiro, daremos o comando e depois explicaremos os parâmetros. Aqui está:

```
>Dtools[Deplot](diff(y(x), x)=x, y(x), x = 0 .. 2, [[y(0) = 0]], y = 0 .. 5, dirgrid=[10, 10],  
color=black, linecolor=COLOR(0, 0, 0));
```

O comando em si, *Dtools[Deplot]*, indica que é parte do pacote Dtools. Os parâmetros são (a) $\text{diff}(y(x), x) = x$, que é a equação diferencial a ser plotada, (b) a variável dependente, $x = 0 \dots 2$, (d) a condição inicial para a curva preta que representa uma solução em particular, $[[y(0) = 0]]$ dado como “lista de listas” dentro de colchetes duplos, (e) o intervalo da variável dependente, $y =$

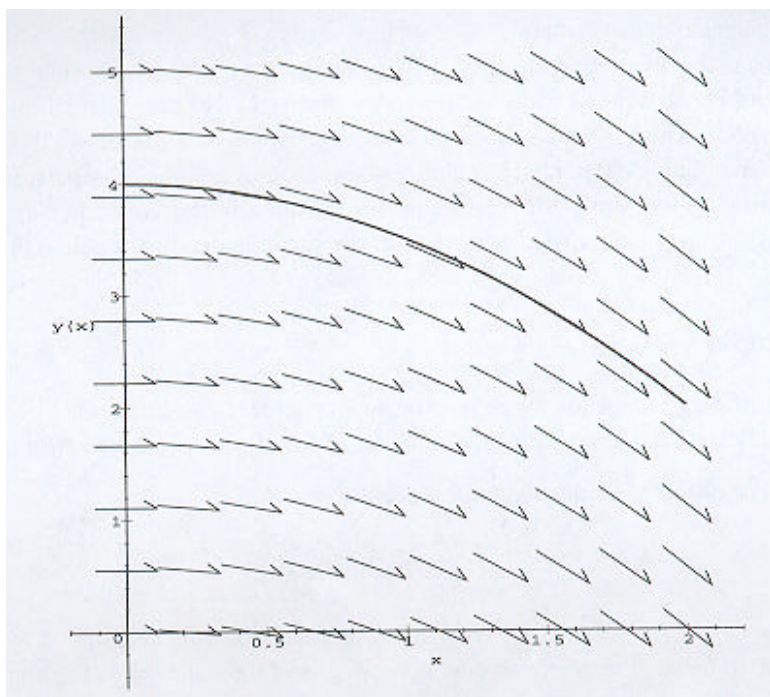


Figura 9.6 Campo de direção para $\frac{\partial}{\partial x} y(x) = kx$ com $k = -1$

0 .. 5, (f) o número de segmentos da tangente a serem incluídos no plot, *dirgrid*=[10, 10], (g) a cor dos segmentos da tangente, *color*=black, e, finalmente, (h) a cor da linha representando a solução particular satisfazendo à condição inicial dada, *linecolor*=COLOR(RGB, 0, 0, 0));

Um exemplo de decaimento existe quando $k = -1$ (Figura 9.6). Aqui está o comando e o plot de seu campo de direção, incluindo a solução para a condição inicial $[y(0) = 4]$:

[Detools[Deplot](diff(y(x), x)=-x, y(x), x = 0 .. 2, [[y(0)=4]], y = 0 .. 5, dirgrid=[10, 10], color black, linecolor=COLOR(RGB, 0, 0, 0));

Soluções com Tentativas e Erros

Muitas das equações diferenciais mais simples podem ser resolvidas com tentativas e erros. No caso da Equação 9.16, pergunta-se, “Qual função tem uma derivada que seja, exceto pela constante multiplicativa, a própria função?” Enquanto você percorre a lista de derivadas para as funções elementares, você vai encontrar a função $y = e^x$, cuja derivada também é e^x . Se

Se a lista na qual você está procurando contém $y = e^{kx}$, você vê que a sua derivada é ke^{kx} . Obviamente, esta é uma solução para a equação diferencial em 9-16, mas é a mais geral? Generalizando a função mais a fundo, escrevemos nossa tentativa de solução $y = Ae^{kx} + C$. A derivada desta função é $dy/dx = kAe^{kx}$, que é igual à nossa tentativa de solução apenas se $C = 0$. É sabido que a solução geral de uma equação diferencial possui tantas constantes arbitrárias quanto a ordem da equação. Uma equação diferencial de primeira ordem tem uma constante arbitrária, correspondendo à constante que é introduzida como um resultado da única integração necessária para a resolução do problema.

Exemplo 9-10

Resolva a equação diferencial para um investimento onde a taxa de juros é uma constante e computada a cada instante. Ache o valor de k quando a taxa de juros anual é de 7%.

Resolução: A equação diferencial para este problema é

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t) = kP(t) \quad (9-17)$$

Você viu que a solução é $P(t) = Ae^{kt}$, solução achada por tentativa e erro. Consideremos $P(0)$ a quantidade do investimento em $t = 0$. Então $P(0) = Ae^{k0} = A$. A constante A é identificada com a quantidade de dinheiro investido em $t = 0$.

Se a taxa anual efetiva de juros é 7%, então o investimento de $A = P(0)$ dólares vai render para $P(1) = 1.07 P(0)$ dólares. Logo, para $t = 1$ ano,

$$P(1) = P(0)e^{k1} = 1.07P(0) \quad (9-18)$$

Cancelando $P(0)$ dos segundos dois termos da equação 9-18, temos $e^k = 1.07$, e podemos resolver para k :

>solve(exp(k) = 1.07, {k});

{k = 0.6765864847}

Deixaríamos este número de casas decimais em nosso valor de k mesmo que a taxa de juros seja dada apenas em três casas porque o investidor 7% um número exato e poderia esperar de todos os cálculos sejam baseados no valor derivado de k que sejam exatos até um centavo, mesmo se grandes quantias forem investidas. A fórmula para o rendimento do investimento para todo dólar investido é

>p := t->exp(0.6765864847*t)

p := t → e^(0.6765864847)

Se um milhão for investido, a quantia após um ano deve ser exatamente \$1.070.000,00

Que é o que temos aplicando a fórmula:

>P = 1e6*p(1);

$$P = 107000000010^7$$

Sua vez. Se \$ 1 bilhão (1e9) é investido, a fórmula com $k = 0.06765864847$ ainda está correta?

Resposta: _____

Podemos ver nos exemplos que existe uma maneira de resolver equações diferenciais de primeira ordem sem a necessidade de aplicar qualquer método. Construa uma tabela de derivadas de funções comuns, expressando a derivada em termos da variável dependente e também na forma usual contendo apenas a variável dependente. Esta tabela se tornará um “dicionário” para resoluções de tentativas e erros.

Exemplo 9-11

Dê a informação na tabela para $y = kx^n + C$.

Resolução: Tire a derivada desta função; então expresse em termos da variável dependente, $y(x)$, e também da variável independente, x .

>y := k*x^n+C:

>Diff('y', x) = diff(x, y);

$$\frac{\partial}{\partial x} y = \frac{kx^n n}{x}$$

O lado direito pode ser escrito como $\frac{\partial}{\partial x} y = \frac{n(y-C)}{x}$, ou na forma diferencial, $x dy = n(y-C)dy$.

Sua vez. Faça a tabela para $y = A \sin(x)$.

Resposta: _____

Dada a equação diferencial de primeira ordem, veja se a forma da equação condiz com alguma do seu dicionário. Sendo este o caso, você está chegando perto da resolução! Muitas das equações diferenciais mais comuns podem ser resolvidas desta forma. Ainda assim são muito poucas as equações que respondem a esta abordagem. O Maple pode resolver muitas mais, porém, você precisa estar envolvido na resolução e a melhor maneira é realmente usando os métodos-padrão. Desta forma, será mais fácil interpretar os resultados do Maple e decidir optar por métodos alternativos quando os convencionais não funcionam de alguma forma.

A procura por métodos mais gerais de resolução ainda tem base na classificação da equação diferencial. No fim, deixaremos o Maple procurar uma resolução baseada em seus próprios métodos. Se tudo isto falhar, é melhor você retornar às abordagens numéricas e gráficas. Estas requerem condições iniciais conhecidas, mas elas podem fornecer soluções aproximadas quando as soluções analíticas não são possíveis. Na próxima seção, retornamos ao caso onde é possível reorganizar a equação diferencial de forma que cada termo diferencial contenha apenas sua própria variável.

Separação de Variáveis, continuação

Considere o problema de encontrar a resolução para

$$\frac{\partial}{\partial x} y = -ky^2 \quad (9-19)$$

Esta forma apareceria em uma tabela de equações diferenciais derivada de funções elementares, já que $y = \frac{1}{kx}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{kx^2} = -\frac{k}{k^2 x^2} = -ky^2$. Logo, encontraríamos a solução para a equação diferencial 9-19 vendo na tabela o correspondente à função elementar $y = 1/kx$. Esta não pode ser a solução mais geral, pois não há constante de integração no resultado. Existem apenas alguns lugares para pôr tal constante; então algumas tentativas e erros vão encontrar a solução completa, mas vamos procurar por um método melhor neste momento.

Se escrevermos uma equação na forma diferencial, temos $dy = -ky^2 dx$. Movendo o termo contendo dx para o lado esquerdo e dividindo por y^2 , temos $kdx + \frac{dy}{y^2} = 0$. As variáveis estão separadas. Cada diferencial é multiplicado pela sua própria variável ou uma constante. Integrando, temos $\int kdx + \int \frac{dy}{y^2} = C$, $kx - \frac{1}{y} = C$, $y = \frac{1}{kx - C}$. A constante de integração está presente e logo temos a solução mais geral para a Equação 9-19.

Exemplo 9-12

Ache a solução para a Equação 9-19 usando o Maple

Resolução:

```
>sol912 := dsolve(diff(y(x), x) = -k*y(x)^2, y(x));
```

$$\text{sol912} := \frac{1}{y(x)} = kx + _C1$$

```
>sol912a := student[isolate](sol912, y(x));
```

$$y(x) = \frac{1}{kx} + _C1$$

Nós identificamos $_C1 = -C$, e as duas soluções são idênticas.

Sua vez. Ache a solução para $\frac{dy}{dx} = -ky^3$ separando as variáveis. Verifique usando o comando *dsolve*.

Resposta: _____

Exemplo 9-13

Resolva a equação diferencial *deq913* separando as variáveis. Verifique a solução usando o Maple.

```
>deq913 := diff(y(x), x)+k*x*y(x)^3=0;
```

$$\text{deq913} := \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) + kxy(x)^3 = 0$$

(a) Para iniciar a separação de variáveis, escreva a equação na forma diferencial.

```
>eq913a := dy + k*x*y^3*dx=0;
```

$$\text{eq913a} := dy + kxy^3 = 0$$

(b) Divida por y^3 para separar as variáveis.

```
>eq913b := expand (eq913a/y^3);
```

$$\text{eq913b} := \frac{dy}{y^3} + kxdx$$

(c) Integre.

```
>eq913c := int(1/y^3, y)+int(k*x, x) = C;
```

$$eq913c := -\frac{1}{2} \frac{1}{y^2} + \frac{1}{2} kx^2 = C$$

(d) Verifique usando o comando *dsolve* do Maple.

>eq913d := dsolve(deq913, y(x));

$$eq913d := \frac{1}{y(x)^2} = kx^2 + _C1$$

Procure fazer uns cálculos mentais para provar que as duas soluções são idênticas.

(e) Se você quiser expressar a solução como uma função, use o comando :

>convert(student[isolate](eq913d, y(x)), radical);

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{kx^2 + _C1}}$$

Se você pedir ao Maple para isolar $y(x)$ em *eq913d*, ele escreve a solução na forma *RootOf*. O propósito de *convert(..., radical)* é escrever $y(x)$ em termos de radical.

Sua vez: Ache, por separação de variáveis e por *dsolve*, a solução de

$$Deq913yt := k \left(x \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) + 2y \right) = xy(x) \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right)$$

Resposta: _____

A constante de integração pode ser determinada se uma condição inicial for conhecida. O próximo exemplo mostra como.

Exemplo 9-14

Resolva

>deq914 := 2*y(x)+x^2*diff(y(x), x) = -x*y(x);

$$deq914 := 2y(x) + x^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) = -1$$

Dê a condição inicial

>ic914 := y(7/2)=1/ln(2);

$$ic914 := y\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{\ln(2)}$$

Resolução: Veja que demos um nome a uma equação diferencial e à equação descrevendo a condição inicial. Isto facilitará na formulação do comando *dsolve*.

(a) para aplicar a técnica de separação de variáveis, nós re-escreveremos *deq914* na forma diferencial.

>deq914a := 2*y*dx+x^2*dy=-x*y*dx;

$$eq914a := 2ydx + x^2dy = -xydx$$

(b) Divida por x^2y .

>eq914b := expand(eq914a/(x^2*y));

$$eq914b := 2 \frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

(c) As variáveis estão separadas; então encontramos a solução integrando termo por termo. A solução é

>eq914b := int(2/x^2, x)+int(1/y, y) = int(-1/x, x)+C;

$$eq914b := -\frac{2}{x} + \ln(y) = -\ln(x) + C$$

Determine a constante C substituindo a condição inicial:

>eq914b1 := subs(x=7/2, y = 1/ln(2), eq914b);

$$eq914b1 := -\frac{4}{7} + \ln\left(\frac{1}{\ln(2)}\right) = -\ln\left(\frac{7}{2}\right) + C$$

>solve(eq914b1, {C});

$$\{C = -\frac{4}{7} - \ln(\ln(2)) + \ln\left(\frac{7}{2}\right)\}$$

(d) Usando Maple,

>dsolve({deq914, ic914}, y(x));

$$eq914c := y(x) \frac{7e^{\left(\frac{2}{x}\right)}}{2xe^{\left(\frac{4}{7}\right)} \ln(2)}$$

Estas soluções são iguais? São, mas, é necessário um pouco de álgebra para prová-lo. Este é um caso onde as rotinas de simplificação do Maple têm dificuldades em mostrar a igualdade de duas equações. De qualquer forma, sempre é possível verificar se as soluções são quase iguais

plotando as duas funções no mesmo gráfico. Você verá uma única linha, mas, adicionando um pequeno número a uma das funções, como 0.1, você pode separá-las. Vendo então duas linhas.

Sua vez. Resolva $\frac{dy}{dx}$, $y(0) = 1$. Qual o formato da solução?

Resposta: _____

Revisão

Nós estivemos discutindo dois métodos, um direto ao ponto e outro onde você define a equação diferencial e usa o comando *dsolve* do Maple ou a expressão diferencial “falsa”. Uma vez que você separou as variáveis, você converte para uma equação contendo integrais. Já que você faz parte da conversão à mão, você deve tomar um cuidado especial para copiar os termos corretamente, mantendo controle dos sinais negativos e coisas assim. O primeiro método é geral por que trabalha num campo mais vasto das equações diferenciais do que o tipo da separação das variáveis. O segundo método é mais passo a passo e você pode se deparar com um caso onde as variáveis não podem ser separadas. Se isto acontecer, você terá de tentar outras técnicas, assim como estas que discutiremos nas seções seguintes.

Gráfico da Solução de Uma Equação Diferencial

Aqui nós vamos introduzir o primeiro dos métodos que funciona mesmo que o Maple não consiga encontrar uma solução simbólica para a equação diferencial. Lembre-se de que uma equação diferencial de primeira ordem dá uma informação a respeito das inclinações das linhas de soluções em pontos pelo plano. Usando esta informação, você poderia plotar pequenos segmentos tendo a inclinação da linha de solução em vários pontos selecionados no plano. Sendo mais específico, você pode marcar um retângulo no plano x, y , digamos que $x = 0 \dots 10$ e $y = 0 \dots 10$, e construir uma tabela para 121 pontos (x_i, y_j) , $i, j = 0 \dots 10$. Os correspondentes na tabela são as inclinações dy/dx em cada um destes pontos. Usando estes dados, você desenha pequenos segmentos de linha, tendo calculado as inclinações, centrada nos pontos.

Agora, você tem uma imagem de todas estas inclinações. Construa uma solução em particular, selecionando qualquer ponto no plano e seguindo a sua linha de inclinação até se unir a outra linha de inclinação. Enquanto você segue as linhas, constrói uma possível solução para a equação diferencial.

Exemplo 9-15

Construa as linhas de inclinação para

```
>deq915 := diff(y(x), x) = -y(x)/x;
```

$$deq915 := \frac{\partial}{\partial x} y(x) = -\frac{y(x)}{x}$$

Com a condição inicial

```
>ic915 := y(1) = 10;
```

$$ic915 := y(1) = 10$$

Resolução: Você viu que o comando *Deplot* tem várias opções. Aqui está a sua glória.

```
>Detools[Deplot](deq915, y(x), x = 1 .. 10, [[ic915]], y = 0 .. 12, dirgrid=[10, 10],
color=black, linecolor=COLOR(RGB, 0, 0, 0), scaling=constrained, stepsize=0.1);
```

Se o Maple puder encontrar uma solução para a equação diferencial, como pode neste caso, você pode achar a solução e plotá-la.

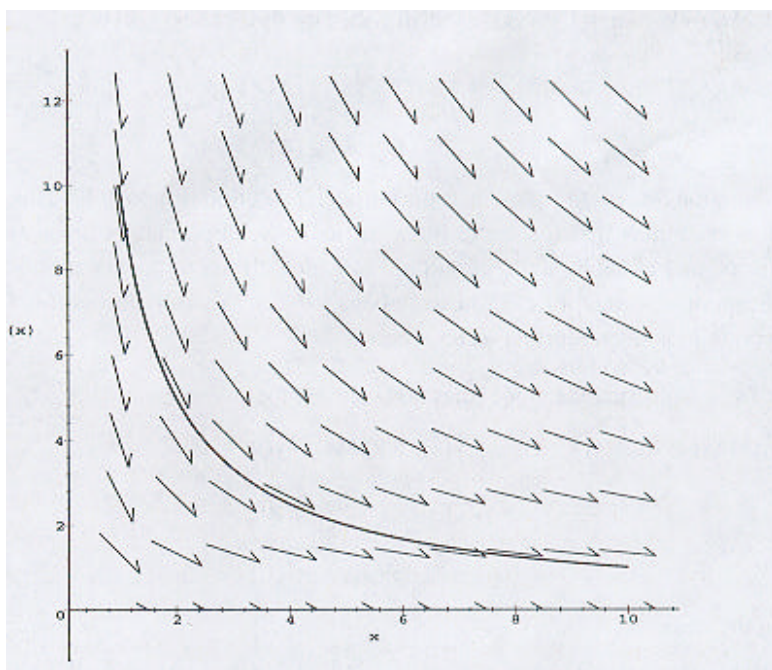


Figura 9.7 Campo de direção para o exemplo 9-15

```
>s915 := dsolve({deq915, ic915}, y(x));
```

$$s915 := y(x) = \frac{10}{x}$$

Plotando o lado direito de s915, temos a mesma linha da Figura 9.7.

Sua vez. Construa as linhas de inclinação para

>deq915yt := diff(y(x), x) = -x/y(x); ic915yt := y(0) = 1;

$$deq915yt := \frac{\partial}{\partial x} y(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

$$ic915yt := y(0) = 1$$

Descreva a fórmula da solução particular.

Resposta: _____

Exemplo 9-16

Construa as linhas de inclinação para

>deq916 := x+sqrt(1+y(x)^2)*diff(y(x), x)=0; ic916 := y(0)=4;

$$deq916 := x + \sqrt{1 + y(x)^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} xy \right) = 0$$

$$ic916 := y(0) = 4$$

As linhas de direção neste plot cruzam a solução em particular (Figura 9.8). Mas, não pode ser! Você precisa reconhecer que a curva para uma solução particular não pode cruzar nenhum dos segmentos da inclinação e com certeza um campo de direção no qual todos os segmentos são linhas retas horizontais não pode representar um campo onde a inclinação é $-x/y(x)$. Vamos discutir isto mais a fundo após você ver mais um exemplo:

Sua vez. Construa as linhas de inclinação e a solução para

Deq916yt := diff(y(x), x) = -x/y(x); ic916yt := y(0) = 1;

$$deq916yt := \frac{\partial}{\partial x} y(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

$$ic916yt := y(0) = 1$$

Usando o comando

>Detools[Deplot](deq916yt, y(x), x = -2 .. 2, [[ic916yt]], y = -1 .. 1, dirgrid=[20, 10], color=black, linecolor=COLOR(RGB, 0, 0, 0), scaling=constrained, stepsize=0.1);

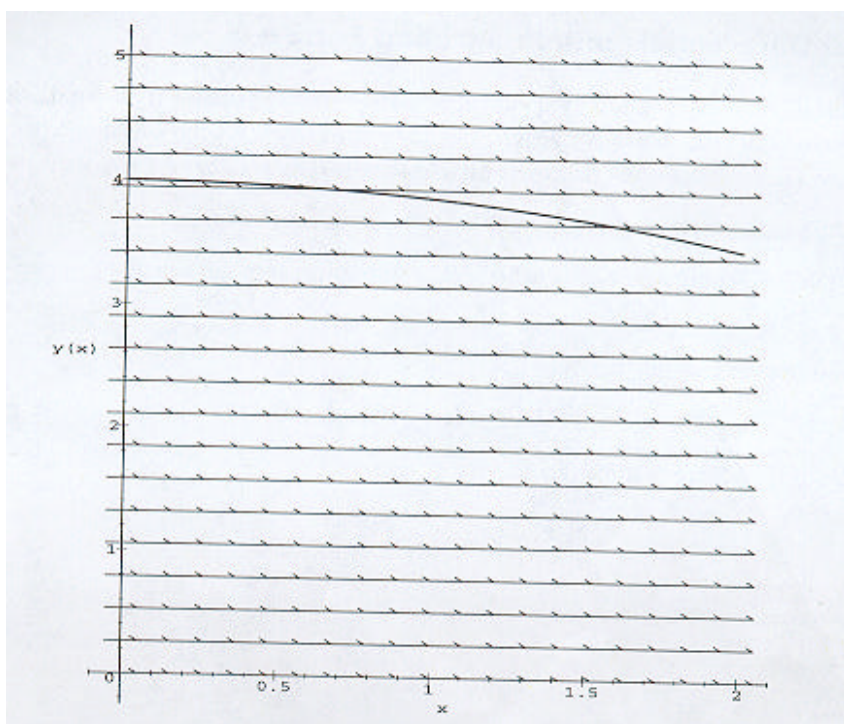


Figura 9.8 Um plot incorreto para o campo de direção do Exemplo 9-16

O que está errado no plot? Resolva a equação diferencial para esta condição inicial e compare a solução ao plot.

Resposta: _____

Agora reveja os dois últimos exemplos. Eles respondem à pergunta “Por que aprender técnicas de solução para equações diferenciais?” Os últimos exemplos mostram que você não pode aceitar cegamente os gráficos produzidos pelo solucionador de equações diferenciais. Você precisa pesquisar se os gráficos estão corretos ou não. Se as inclinações do campo de direção são todas horizontais e não seguem a inclinação da curva de solução, então você deve perceber que algo está errado. O Exemplo 9-16, parte “*Sua vez*” mostra que o solucionador pode adicionar uma parte extra à solução. E não apenas isso, uma parte da curva foi perdida. (tente $ic916yta := y(0) = -1$; como condição inicial e então você verá a outra metade da solução completa.) Verificar a solução é extremamente importante. Sempre se pergunte se a solução faz sentido e cheque o comportamento suspeito.

Diferenciais Exatas e Fatores de Integração

A diferencial total é dada pela Equação 9-8. A expressão no lado direito de 9-8 é a forma diferencial como as que nós já encontramos. Se esta forma é igualada a zero, temos uma equação diferencial expressa no formato diferencial ao invés do formato de derivada.

A forma diferencial pode ou não ser de maneira que satisfaça $df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$. Se for o caso, a equação diferencial é chamada exata. A solução da equação é simplesmente $f(x, y) = C$.

A equação diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (9-20)$$

será exata se houver alguma função $f(x, y)$ de forma que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \quad (9-21 a)$$

Destas equações, vemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} M(x, y) \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) \quad (9-21b)$$

Vamos admitir que as duas derivadas parciais $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ são iguais, isto é: não importa em que ordem as derivadas são tiradas. Logo,

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) \quad (9-21c)$$

Reciprocamente, se as condições em 9-21b permanecerem, pode ser mostrado que o lado direito da Equação 9-20 é uma diferencial exata. A solução para a equação diferencial 9-20 começa integrando $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$ em relação a x .

$$f = \int^x M(x, y) dx + g(y) \quad (9-22)$$

O pequeno x acima do sinal de integral significa que y é tratado como uma constante na integração. Já que y foi mantido constante quando computamos $\frac{\partial f}{\partial x}$, também continuará constante durante a integração. A integral na Equação 9-22 pode ser realizada no Maple

escrevendo y ao invés de $y(x)$ na expressão $M(x, y)$. Desta forma, o Maple trata y como uma constante, assim como queremos. Qualquer parte da função f que consiste apenas de termos em y só sairá da derivada parcial

de f em relação a x ; então adicionamos uma função desconhecida $g(y)$, representando estes termos perdidos. Usando o valor de f computado de 9-22, examinamos a segunda parte de 9-21a :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int^x M dx + g(y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \int^x M dx + \frac{d}{dy} g(y) = N \quad (9-23)$$

Na Equação 9-22 nós escrevemos dg/dy porque g é uma função de y apenas. Resolvendo para dg/dy encontramos

$$\frac{d}{dy} g(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int^x M dx \quad (9-24)$$

Nós falamos que g é uma função de y apenas, então o lado direito da Equação 9-24 deveria também ser uma função de y apenas. Se tirarmos a derivada do lado direito de 9-24 em

relação a x , temos $\frac{\partial}{\partial x} \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int^x M dx \right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$. Isto é verdadeiro desde que

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{de 9-21c.}$$

Integrando 9-24, temos

$$g = \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int^x M dx \right) dy \quad (9-25)$$

Substituindo 9-25 em 9-22 temos

$$f(x, y) = \int^x M(x, y) dx + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int^x M dx \right) dy \quad (9-26)$$

Gastamos algum tempo nesta derivação por conta da importância das equações diferenciais exatas. Elas fornecem a solução para o tipo mais comum de equação diferencial, a equação diferencial linear que aparece na próxima seção.

Obviamente, um exemplo de aplicação da Equação 9-26 é necessário e aqui está.

Exemplo 9-17

Demonstre que

$$>\text{ex917} := \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(\frac{1}{y-x} \left(y \sqrt{x^2+y^2} \right) \right) dy = 0;$$

$$ex917 := \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy = 0$$

é exata, depois solucione usando a Equação 9-26.

Resolução: A primeira coisa a fazer é identificar as quantidades M e N em $ex917$.

>M := 1/sqrt(x^2+y^2); N := 1/y - x/(y*sqrt(x^2+y^2));

$$M := \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$N := \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Calcule as derivadas em 9-21b para demonstrar que a equação diferencial $ex917$ é exata.

>Diff('M', y) = simplify(diff(M, y));

$$\frac{\partial}{\partial y} M = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

>Diff('N', x) = simplify(diff(N, x));

$$\frac{\partial}{\partial x} N = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

As derivadas parciais são iguais; portanto, a equação diferencial $ex917$ é exata. Perceba o uso dos apóstrofes envolvendo M e N nos dois últimos comandos. Isto é para evitar a avaliação dos mesmos no lado esquerdo da resposta do Maple, nos dando uma equação com boa visualização.

Escreva a fórmula para a solução da equação diferencial exata como um comando do Maple. Use as formas inertes para derivadas e integrais, de forma que a fórmula em si seja mostrada. Então, demonstre as integrais que precisam ser realizadas usando o comando *eval*. A avaliação acontece usando o comando *value*. O problema está sendo feito desta forma para mostrar cada passo da resolução. Pode ser feito de uma vez, substituindo as formas inertes no comando.

>s917 := Int('M', x)+Int('N'-Diff(Int('M', x), y), y);

$$s917 := \int M dx + \int N - \left(\frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) dy$$

$$>s917a := \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \int \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} - \left(\frac{\partial}{\partial y} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx \right) dy$$

>s917b := value(s917);

$$s917b := \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$$

A solução para a equação diferencial ex917 é $\ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$. Esta solução pode ser verificada escrevendo ex917 na forma de equação diferencial e então usando o comando *dsolve*.

deq := 1/sqrt(x^2+y(x)^2) + (1/y(x)-x/(y(x)*sqrt(x^2+y(x)^2)))*diff(y(x), x) = 0;

$$deq917 := \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{x}{y(x)\sqrt{x^2 + y(x)^2}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) = 0$$

>sol917 := dsolve(deq917, y(x));

$$sol917 := \ln(x + \sqrt{x^2 + y(x)^2}) = _C1$$

Sua vez. Demonstre que

>ex917yt := (y/x^2+x+1/y)*dx+(x-1/x-x/y^2)*dy = 0;

$$ex917yt := \left(\frac{y}{x^2} + y + \frac{1}{y} \right) dx + \left(x - \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} \right) dy = 0$$

é exata. Depois solucione, aplicando a Equação 9-26. Verifique a solução escrevendo ex917yt como uma equação diferencial e usando *dsolve*.

Resposta: _____

Agora estamos prontos para aplicar nosso conhecimento sobre equações diferenciais exatas em equações diferenciais lineares de primeira ordem.

Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

Fatores de Integração

Se uma equação diferencial $Mdx + Ndy = 0$ for multiplicada por uma expressão $f(x, y)$ de forma que $fMdx + fNdy$ é um diferencial exato, então f é chamado de fator de integração para a equação diferencial. Por exemplo, $\frac{1}{x^2}$ é um fator de integração para a equação

diferencial $xdy - ydx = 0$ porque $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$. A solução para a equação diferencial

é portanto simplesmente $y/x = C$. O uso de um fator de integração fornece a chave para a solução de uma equação diferencial linear de primeira ordem. Cujas forma geral é

$$\frac{dy(x)}{dx} + P(x)y(x) = Q(x) \quad (9-27 \text{ a})$$

Ou seu equivalente diferencial

$$Dy(x) + P(x)y(x)dx = Q(x)dx \quad (9-27b)$$

Depois de passar tanto tempo em equações diferenciais exatas, você deve suspeitar de que vamos procurar por um fator de integração para transformar a Equação 9-27 em uma equação diferencial exata. Podemos descobrir a forma do fator de integração resolvendo uma equação diferencial mais simples:

$$\frac{dy(x)}{dx} + P(x)y(x) = 0 \quad (9-28 \text{ a})$$

Separando as variáveis dividindo por $y(x)$, temos

$$\frac{dy}{y} + P(x)dx = 0 \quad (9-28b)$$

cuja solução é $\ln(y) + \int P(x)dx = \ln(C)$, onde nós escolhemos $\ln(C)$ – até porque $\ln(C)$ ainda é uma constante – como a constante de integração para fazer a fórmula final mais simples. Eleve cada lado da equação à potência e para obter $ye^{\int P(x)dx} = C$ e tire o diferencial total do lado direito desta equação. O resultado é

$$d\left(ye^{\int Pdx}\right) = e^{\int Pdx}(Pydx + dy) \quad (9-29)$$

O termo entre parênteses no lado direito da Equação 9-29 é simplesmente o lado esquerdo de 9-27 a, então multiplicando pelo fator de integração $e^{\int Pdx}$ produz uma diferencial exata, $d\left(ye^{\int Pdx}\right)$. Temos de multiplicar o lado direito de 9-27 a pelo mesmo fator de integração para preservar a igualdade. Com esta multiplicação, a equação 9-27 a se torna

$$e^{\int Pdx}(dy(x) + P(x)y(x)dx) = e^{\int Pdx}Q(x)dx \quad (9-30)$$

O lado direito é uma diferencial exata cuja integral sabemos ser $ye^{\int Pdx}$, e o lado direito é apenas uma função de x . A solução é portanto

$$ye^{\int Pdx} = \int e^{\int Pdx}Q(x)dx + C \quad (9-31)$$

A equação é importante porque modela vários processos da ciência, engenharia, economia e outras disciplinas.

Exemplo 9-18

Digamos que um para-quedista pule de um avião na altura de 4572 metros. Ache uma equação diferencial para a velocidade vertical considerando que a resistência do ar retarda o movimento com uma força proporcional à sua velocidade para baixo.

Derive, depois resolva a equação diferencial e determine a constante no termo da resistência do ar se a massa do para-quedista é de 50Kg e sua velocidade terminal é 45m/s que é aproximadamente 100 milhas por hora. Um objeto caindo pela atmosfera eventualmente chega a uma velocidade constante, chamada velocidade terminal, desde que tenha altura suficiente quando inicia a queda.

Resolução: As forças agindo no para-quedista são gravidade (mg) para baixo e resistência do ar (kv) para cima. A segunda lei de Newton para o movimento diz que a força total no para-quedista produz uma variação na velocidade dada pela equação

>deq918 := m*g-k*v(t) = m*diff(v(t), t);

$$deq918 := mg - k v(t) = m \left(\frac{\partial}{\partial t} v(t) \right)$$

Onde m é a massa da pessoa em Kg, g é a constante igual a 9.8 metros por segundo ao quadrado (m/s^2), K é uma constante indeterminada cuja unidade é quilogramas por segundo (Kg/s) e t é o tempo em segundos (s).

Dividindo $deq918$ pela constante m , temos uma equação cujo formato é o mesmo da equação 9-27.

>deq918a := diff(v(t), t)+k/m*v(t)=g;

$$deq918 := \left(\frac{\partial}{\partial t} v(t) \right) + \frac{kv(t)}{m} = g$$

Identificamos os termos da Equação 9-31 para a solução da equação diferencial linear 9-27 e aplicamos ao caso particular de $deq918a$. O fator de integração é

>exp(IntP(x), x)=exp(Int(k/m, t));

$$e^{\left(\int P(x) dx \right)} = e^{\left(\int \frac{k}{m} dt \right)}$$

O valor desta integral é

>f918 := value(exp(int(k/m, t)));

$$f918 := e^{\left(\int \frac{k}{m} \right)}$$

Substituindo na Equação 9-31, temos

>s918 := v(t)*exp(k/m*t) = Int(g*exp(k/m*t), t)+C;

$$s918 := v(t)e^{\left(\frac{kt}{m}\right)} = \int ge^{\left(\frac{kt}{m}\right)} dt + C$$

Podemos isolar $v(t)$ com o comando

>s918a := expand(value(s918)/exp(k/m*t));

$$s918a := v(t) = \frac{mg}{k} + \frac{C}{e^{\left(\frac{kt}{m}\right)}}$$

Para determinar a constante C , nós admitimos que $v(0) = 0$. Isto é, a velocidade de queda do para-quedista quando salta do avião é 0. Substituindo os parâmetros conhecidos, temos

>s918b := subs(m = 50, g = 9.8, v(t) = 0, t = 0, s918a);

$$s918b := 0 = \frac{490.0}{k} + \frac{C}{e^0}$$

Perceba que é fundamental fazer a substituição $t = 0$ depois de fazer $v(t) = 0$. Se a ordem destas duas substituições for revertida, o Maple vai escrever $v(0)$ para $v(t)$, fazendo a substituição $v(t) = 0$ impossível porque $v(t)$ não está mais na fórmula! Se você acha isto confuso, tente o comando com as substituições revertidas e observe os resultados.

Agora resolva para C :

>c918 := solve(s918b, C);

A solução para a equação diferencial neste momento é

>s918c := subs(C = c918, m = 50, g = 9.8, s918a);

$$s918c := v(t) = \frac{490.0}{k} + \frac{490.0}{e^{\left(\frac{1}{50}kt\right)}_k}$$

Agora, determine a constante k observando que no limite de longos períodos de tempo, a velocidade $v(\infty) = 45$ é o limite do lado direito de $s918c$. Para ser possível, devemos concluir que k é um número real positivo.

>assume(k>0);

>k918 := solve(45 = limit(rhs(s918c), t = infinity), k);

$$k918 := 10.88888889$$

Chegamos à solução completa de nossa equação diferencial:

```
>sol918 := subs(C = c918, k = k918, m = 50, g = 9.8, s918a);
```

$$sol918 := v(t) = 44.99999999 - \frac{44.99999999}{e^{(2177777778t)}}$$

Uma inspeção de sol918 revela que em $t = 0$, a velocidade é realmente 0 (já que $e^0 = 1$), e a grandes valores de t , o segundo termo será insignificante; então a velocidade terminal é de 45 m/s.

Sua vez. Se definirmos um “longo tempo” como 5 m/k , de quantos segundos estamos falando, a qual velocidade o para-quedista está neste momento, e qual a distância percorrida?

Resposta: $5\text{m/k} = \underline{\hspace{2cm}}$ segundos; $v(5\text{m/k}) = \underline{\hspace{2cm}}$ m/s; distância = $\underline{\hspace{2cm}}$ m

Equações Diferenciais Lineares com Coeficientes Constantes

Introdução ao Método com Operador

Quando o grau de uma equação diferencial linear é dois ou mais, o método com operador, o qual será discutido a seguir, simplifica o trabalho. Ele fornece uma método para a resolução de equações de importância prática. Você já conheceu o operador diferencial D do Maple nos capítulos anteriores. Usando esta notação, uma equação diferencial linear de terceira ordem pode ser escrita assim

```
>(D@@3)(y) + a*(D@@2)(y) + b*D(y) + c*y = 0;
```

$$(D^{(3)})(y) + a(D^{(2)})(y) + bD(y) + cy = 0$$

Esta forma de equação diferencial pode ser convertida para a forma mais familiar usando *convert, diff*:

```
>convert((D@@3)(y)(t) + a*(D@@2)(y)(t) + b*D(y)(t) + c*y(t) = 0, diff);
```

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3} y(t) \right) + a \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(t) \right) + b \left(\frac{\partial}{\partial t} y(t) \right) + cy(t) = 0$$

Existe uma álgebra para os operadores D que nós não cobriremos agora. Consulte qualquer texto de cálculo técnico sobre este assunto. Faremos apenas o suficiente para você entender a abordagem.

Exemplo 9-19

Resolva:

>deq919 := diff(y(x), x\$2)+4*diff(y(x), x)-5*y(x) = 0;

$$deq919 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) \right) + 4 \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) - 5y(x) = 0$$

Resolução: Já que queremos usar o método do operador, vamos converter esta equação para o formato do operador.

>deq919a := convert(deq919, D);

$$eq919a := (D^{(2)}) (y)(x) + 4 D(y)(x) - 5y(x) = 0$$

Se “fatorarmos” $y(x)$, a equação vai se parecer com uma equação quadrática:

>eq919 := (D^2+4*D-5)*y = 0;

$$eq919 := (D^2 + 4D - 5)y = 0$$

Esta forma quadrática é fatorável:

>factor(eq919);

$$(D+5)(D-1)y = 0$$

Digamos que $z = (D-1)y$. Então eq919 passa a ser $(D+5)z = 0$, ou $Dz+5z = 0$. Nesta última forma, ela é equivalente à da equação diferencial

>eq919a := convert(D(z)(x)+5*z(x) = 0, diff);

$$eq919a := \left(\frac{\partial}{\partial x} z(x) \right) + 5z(x) = 0$$

A equação eq919 é uma equação diferencial linear de primeira ordem, cuja solução é facilmente achada.

>eq919a := dsolve(eq919a, z(x));

$$eq919a := z(x) = e^{(-5x)}_C1$$

Uma vez que conhecemos $z(x)$, substitua a solução em $z = (D-1)y$ e resolva para y , já que esta também é uma equação diferencial linear de primeira ordem. Substituindo os termos apropriados em $z = (D-1)y$ chegamos em

>deq919b := op(2, s919a) = convert(D(y)(x) - y(x), diff);

$$deq919b := e^{(-5x)}_C1 = \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) - y(x)$$

Esta é uma equação diferencial linear que é facilmente solucionável. A solução é

```
>s919b := dsolve(deq919b, y(x));
```

$$s919b := y(x) = \left(-\frac{1}{6} - C1 + e^{(6x)} - C2 \right) e^{(-5x)}$$

Compare esta solução com a solução passo a passo do Maple:

```
>s919c := dsolve(deq919, y(x));
```

$$s919c := y(x) = e^x C1 + C2 e^{(-5x)}$$

Mais uma vez não é óbvio que as duas soluções sejam idênticas, mas após alguma manipulação *s919b* chega à forma *s919c*.

Estamos agora saindo um pouco da nossa discussão das técnicas-padrão de solução para equações diferenciais e entrando nos métodos que proporcionam um uso mais completo do Maple. Foi explicado que você precisa ter alguma familiaridade com os métodos clássicos de solução, pelo menos conhecendo um conjunto de equações diferenciais solucionáveis. Quando você obtiver esta familiaridade básica, você estará em posição de ter um olhar crítico a qualquer solução que o Maple proponha e determinar se é verdadeira ou não.

Métodos Numéricos

Foi mencionado mais de uma vez que a maioria das equações diferenciais, como a maioria das integrais, não possuem soluções em termos de um número finito de funções elementares, pelo menos as equações diferenciais típicas. Apenas algumas apresentam soluções diretas, e nós já investigamos algumas delas nas seções anteriores.

Já que as equações diferenciais são solucionadas para fornecer respostas a problemas práticos, geralmente acontece das condições iniciais serem conhecidas ou pelo menos que boas suposições podem ser feitas a respeito das condições iniciais. Com estas como ponto de partida, a equação diferencial é usada para computar uma pequena continuação da curva. Tendo a extremidade da continuação como a nova condição inicial, outra condição é computada. Este processo é repetido quantas vezes forem necessárias para plotar a curva da solução pelo intervalo determinado.

Nós discutimos no Exemplo 9-18 o caso onde a resistência do ar é proporcional à velocidade do objeto passando pelo ar. Em aerodinâmica, nós aprendemos que uma aproximação melhor para resistência do ar é que o arrasto, ou força retroativa, é proporcional ao quadrado da velocidade. Vamos retornar ao caso de nosso para-quedista, desta vez com uma resistência quadrática na equação diferencial.

Exemplo 9-20

Use os dados do Exemplo 9-18, mas desta vez como uma equação diferencial

```
>deq920 := m*g - k*v(t)^2 = m*diff(v(t), t);
```

$$deq920 := mg - kv(t)^2 = m \left(\frac{\partial}{\partial t} v(t) \right)$$

Esta equação pode ser solucionada analiticamente, mas vamos tentar a abordagem numérica. Conhecemos a massa do para-quedista (50 Kg) e o valor para g é 9.8 m/s^2 . Temos de determinar k . Já que k é relativo à velocidade terminal, dv/dt é 0 quando a velocidade terminal é alcançada; a equação para k é simplesmente $0 = 9.8 \times 50 - 45^2 k$; portanto, $k = 0.242$. A equação diferencial, após substituirmos os valores conhecidos pelas constantes, se torna:

```
>deq920a := subs(m = 50, g = 9.8, k = 0.242, deq920);
```

$$deq920a := 490.0 - .242v(t)^2 = 50 \left(\frac{\partial}{\partial t} v(t) \right)$$

A condição inicial ainda é $v(0) = 0$. A solução numérica é encontrada pelo comando *dsolve*, e escrita desta forma:

```
>nsol920 := dsolve({deq920a, v(0) = 0}, v(t), type = numeric);
```

```
nsol920 := proc(rkf45_x) ...end
```

O Maple retorna um procedimento com a solução. Há várias coisas que você pode fazer com o procedimento. O mais útil para os nossos propósitos é o gráfico. Faremos o gráfico de nossa solução usando *plots[odeplot]*. Sabemos do Exemplo 9-18 que um tempo razoável para o plot está na ordem de alguns segundos (Figura 9.9).

```
>plots[odeplot](nsol920, [t, v(t)], 0 .. 10, labels=['t', 'v(t)'], color=black);
```

O Maple faz a diferença quando você quer comparar diferentes tipos de resistência do ar. Uma vez que você tenha digitado as fórmulas no Maple, é uma simples questão de reutilizá-las. Vamos comparar os dois casos: resistência do ar é linear com a velocidade e quadrática com a velocidade como em *deq920*, e ambas tendo a mesma velocidade terminal (Figura 9.10). Os comando são:

```
>p1 := plots[odeplot](nsol920, [t, v(t)], 0 .. 10, labels=['t', 'v(t)'], color=black);
```

```
>p2 := plot(44.99999999-44.99999999/exp(.2177777778*t), t = 0 .. 10, linestyle=2);  
(solução para o exemplo 9-18)
```

```
>plots[display]({p1, p2}); (Mostra as duas curvas no mesmo plot)
```

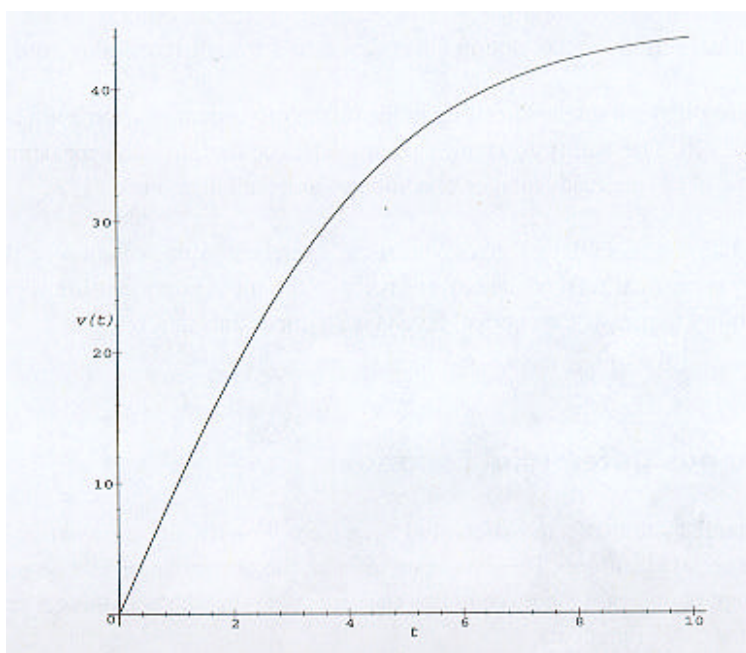


Figura 9.9 Gráfico velocidade x tempo quando a resistência do ar é proporcional a v^2

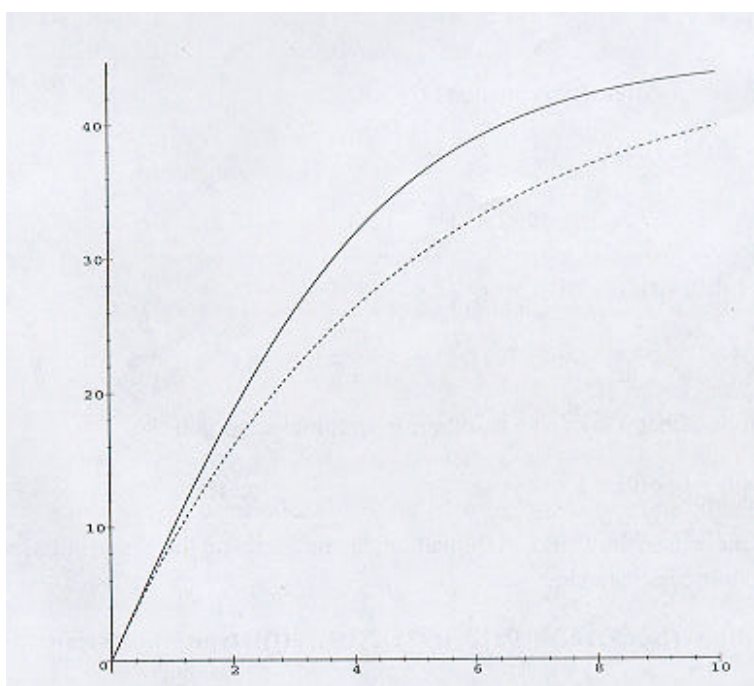


Figura 9.10 Comparação dos termos da resistência do ar linear e quadrática.

Veja que nós usamos a opção de plotagem *linestyle = 2* distinguindo um plot do outro. Você pode ajustar outros parâmetros em qualquer das equações diferenciais e comparar o novo resultado ao anterior. A habilidade de mudar os parâmetros e re-calcular os resultados rapidamente é uma das grandes vantagens da computação matemática.

O Maple Lab deste capítulo tem alguns exercícios para solucionar equações diferenciais por métodos numéricos. Elas talvez sejam as mais importantes no trabalho aplicado, onde a habilidade para medir resultados numéricos é fundamental.

Equações Diferenciais Simultâneas

O Maple suporta equações diferenciais simultâneas. Damos um exemplo de um conjunto de duas simples equações diferenciais. As equações dizem que a derivada de cada uma é igual à da outra, apesar de em um caso existir um sinal de menos, indicando que a derivada é na verdade a negativa da outra função.

Exemplo 9-21

Solucione o sistema de equações diferenciais.

```
>sde921a := diff(u(t), t) = -v(t);
```

$$sde921a := \frac{\partial}{\partial t} u(t) = -v(t)$$

```
>sde921b := diff(v(t), t) = u(t);
```

$$sde921b := \frac{\partial}{\partial t} v(t) = u(t)$$

Resolução: Digamos que exista uma condição inicial

```
>ic921 := v(0), u(0) = 1;
```

Já que todos os coeficientes nas equações diferenciais são numéricos e existe uma condição inicial, temos uma solução numérica:

```
>sol921 := dsolve({sde921a, sde921b, ic921}, {v(t), u(t)}, type = numeric);
```

```
sol921 := proc(rkf45_x) ... end
```

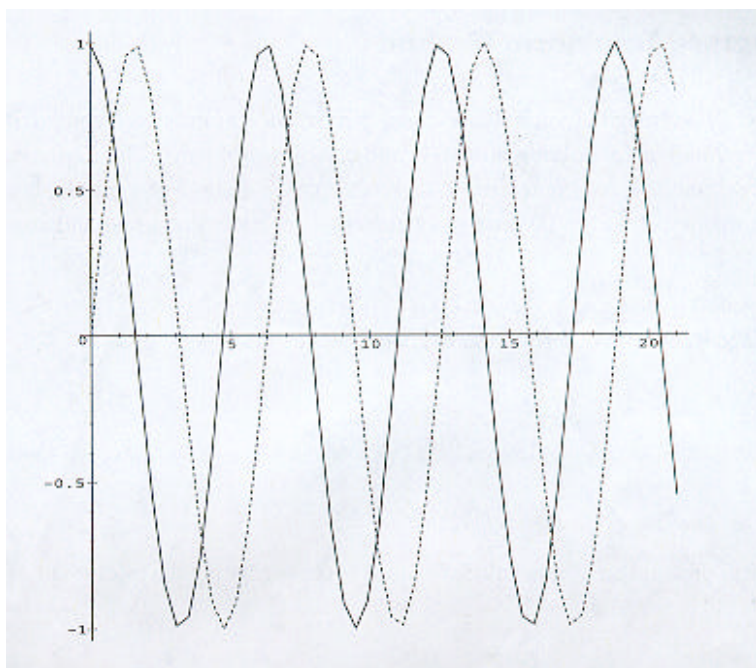


Figura 9.11 Solução numérica de uma conjunto de equações diferenciais simultâneas.

Plotar as soluções nos dá uma idéia clara de suas naturezas (Figura 9.11)

```
>p1 := plots[odeplot](sol921, [t, u(t)], 0 .. 21, color=black);
>p2 := plots[odeplot](sol921, [t, v(t)], 0 .. 21, color=black, linestyle=2);
>plots[display]({p1, p2});
```

Poderíamos aumentar a suavidade das curvas usando mais pontos (usando a opção de plotagem *numpoints* = 200) mas os gráficos já são bem claramente aqueles das funções seno e cosseno. Este sistema de equações diferenciais é simples o bastante para o Maple resolver exatamente:

```
>dsolve({sde921a, sde921b, ic921}, {v(t), u(t)});
```

$$\{v(t) = \sin(t), u(t) = \cos(t)\}$$

Sua vez. Resolva as equações usando a mesma condição inicial do Exemplo 9-21.

```
>sde921yta := diff(u(t), t)=v(t); sde921ytb := diff(v(t), t) = u(t);
```

$$sde921yta := \frac{\partial}{\partial t} u(t) = v(t) \quad sde921ytb := \frac{\partial}{\partial t} v(t) = u(t)$$

Resposta: _____

Método da Transformação de Laplace

O poder da mudança de variável vem sendo enfatizado pelas discussões sobre técnicas para solucionar problemas de cálculo e álgebra. A transformação de Laplace é a *mudança de função*, assim relacionada ao conceito de mudança de variável, mas é um método mais elaborado. É o favorito de engenheiros, especialmente na área de sistemas de controle e elétricos.

A transformação de Laplace de uma função $f(t)$ é definida como

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (9-32)$$

O pacote *inttrans* no Maple automatiza o processo de tirar a integral na Equação 9-32

Exemplo 9-22

Ache a transformação de Laplace de

```
>ex922 := 3+t+t^2 +sin(t) +exp(t);
```

$$ex922 := 3 + t + t^2 + \sin(t) + e^t$$

Resolução: O comando da transformação de Laplace demanda que você liste a variável independente na expressão, neste caso t , e a variável alvo, que por convenção s , a menos que uma variável já esteja sendo usada para outro propósito num problema em particular. O comando é

```
>inttrans[laplace](ex922, t, s);
```

$$\frac{3}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s - 1}$$

Perceba que os termos, mesmo aqueles que surgiram da transformação das funções seno e exponencial, são polinômios racionais. E mais: a transformação de uma derivada de qualquer ordem se reduz a algum múltiplo de s vezes a função cuja derivada está sendo tirada e alguns termos constantes relacionados à condição inicial. Por exemplo, a terceira derivada de $f(t)$ tem transformação de Laplace.

>inttrans[laplace](diff(f(t), t\$3), t, s);

$$s(s \text{ laplace}(f(t), t, s) - f(0)) - D(f)(0) - (D^{(2)})(f)(0)$$

Examinando a resposta do Maple acima, você vê que as variáveis foram banidas e apenas os termos em s e a transformação de Laplace permaneceram. Isto nos permite substituir uma equação diferencial por uma algébrica.

Vamos considerar uma equação diferencial dada por

>deq922 := diff(y(t), t\$2) - Omega^2*y(t) = f(t);

$$\text{deq922} := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(t) \right) - \omega^2 y(t) = f(t)$$

Onde $f(t)$ é uma função. A transformação de Laplace desta equação diferencial é

>inttrans[laplace](deq922, t, s);

$$s(s \text{ laplace}(y(t), t, s) - y(0)) - D(y)(0) - \omega^2 \text{ laplace}(y(t), t, s) = \text{laplace}(f(t), t, s)$$

Podemos isolar o termo da transformação de Laplace para a função de $y(t)$:

>student[isolate](“laplace(y(t), t, s));

$$\text{laplace}(y(t), t, s) = \frac{\text{laplace}(f(t), t, s) + D(y)(0) + sy(0)}{s^2 - \omega^2}$$

A princípio, a equação diferencial está resolvida; isto significa que, se os termos no lado direito forem todos conhecidos, então $\text{laplace}(y(t), t, s)$ é conhecido. A única coisa faltando é um dicionário similar àquele que discutimos no exemplo 9-10, onde podemos olhar para uma tabela de transformações e, com sorte, achar a função produzindo esta transformação.

O Exemplo 922 mostrou que é possível produzir, pelo menos a princípio, uma solução para equações diferenciais usando a transformação de Laplace. Não discutiremos esta questão mais a fundo neste livro, já que é um assunto avançado e existem outros métodos, assim como integração numérica, que são mais fáceis de aplicar nos tipos de problemas que nós encontramos ou provavelmente encontraremos em cálculo básico.

Sua vez. Ache a transformação de Laplace para a equação diferencial no exemplo 9-19, então isole $L(s)$.

Resposta: _____

Exercícios de Papel e Lápis

PP9-1

Dê a ordem e o grau destas equações diferenciais:

(a) $\frac{\partial}{\partial x} y = 2y + 3x$

Resposta: Ordem=_____, Grau=_____

(b) $\left(\frac{\partial}{\partial x} y\right)^2 = 2y + 3x^2$

Resposta: Ordem=_____, Grau=_____

(c) $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y\right) - 2y = 3x^2$

Resposta: Ordem=_____, Grau=_____

(d) $\sqrt{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} y\right)} - ay^2 = bx^3$

Resposta: Ordem=_____, Grau=_____

(e) $\left(\frac{\partial}{\partial x} y\right)^2 + 6x^2 y \left(\frac{\partial}{\partial x} y\right) = x^3 \left(\frac{\partial}{\partial x} y\right)$

Resposta: Ordem=_____, Grau=_____

(f) $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y\right) + 6x^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} y\right) + 5y = 0$

Resposta: Ordem=_____, Grau=_____

(g) $(x^2 + 2xy + y^2)dx^2 + 2xy dx dy - 4dy^2 = 0$

Resposta: Ordem=_____, Grau=_____

(h) $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} y\right)^2} = \frac{y}{x}$

Resposta: Ordem=_____, Grau=_____

$$(i) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} y \right) + qx^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y \right) - r \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + (3x^2 + 2)y = 4x$$

Resposta: Ordem=_____, Grau=_____

$$(j) \left(\frac{\partial}{\partial x} y \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} y \right)^2 + 3 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^3 + 4 \left(\frac{\partial}{\partial x} y \right)^4 = x^4$$

Resposta: Ordem=_____, Grau=_____

$$(k) \frac{1}{\frac{\partial}{\partial x} y} = \frac{1}{xy}$$

Resposta: Ordem=_____, Grau=_____

PP9-2

Diga quais das equações em PP9-1 são equações diferenciais lineares.

Resposta:_____

PP9-3

Use o método de separação de variáveis para solucionar estas equações diferenciais.

$$(a) 10x^2 dx + 5xy dx = 0$$

Resposta:_____

$$(b) xy dy - 3(1-x^2) dx = 0$$

Resposta:_____

$$(c) 15y dx + 10x dy = xy dx$$

Resposta:_____

$$(d) \frac{ydy}{dx} = 3x + 2$$

Resposta:_____

$$(e) \frac{dy}{dx} + y = y^2$$

Resposta:_____

Maple Lab

ML9-1 Decaimento radioativo

(a) Resolva o problema de decaimento radioativo para o rádio, que tem uma taxa de decaimento de $k = -1.3e - 11$ por segundo. Monte a equação diferencial e solucione, dando o valor numérico para k .

Resposta: _____

(b) Ache quantos segundos são necessários para metade dos átomos dados em uma amostra se deteriorarem.

Resposta: _____

(c) Converta este número em segundos para anos.

Resposta: _____

Dica: O tempo que leva para metade dos átomos dados em uma amostra se deteriorarem é chamado de *meia vida*. Digamos que este tempo seja representado por $t_{1/2}$. Então, $N(t_{1/2}) = \frac{1}{2} N(0)$, onde $N(0)$ é o número de átomos inicialmente apresentado. Então $\frac{1}{2} = e^{kt_{1/2}}$; portanto, $\ln(2) = kt_{1/2}$, $t_{1/2} = \ln(2)/k$.

(d) A meia vida do carbono-14 é 5730 anos. Quanto (em porcentagem) ainda permanece de carbono-14 na múmia do Faraó Tutankhamen, que morreu em 1350 antes de Cristo?

Resposta: _____

ML9-2 Distribuição Normal

Uma equação diferencial de extrema importância na teoria de estatística é

$$\frac{dy}{dx} = -kxy$$

Esta é a equação diferencial distribuição de probabilidade normal e é definida para todos os valores de x .

(a) Faça o Maple encontrar a solução geral para $y(x)$ e escreva-a aqui.

Resposta: _____

(b) Se você encontrar dificuldades em achar a solução da equação diferencial em (a), observe a mensagem que o Maple fornece. Qual comando adicional é necessário para fazer com que o Maple finalize a tarefa?

Resposta: _____

(c) A condição inicial é derivada do fato de que $y(x)$ é uma distribuição de probabilidade. Neste caso, a teoria da probabilidade nos diz que $\int_{-\infty}^{\infty} y(x) dx = 1$. Aplique esta condição para determinar o valor da constante arbitrária em (a). Qual é o valor da constante em termos de k ?

Resposta: _____

ML9-3 Vibrações Mecânicas

No estudo de vibrações mecânicas, um sistema que consiste em uma massa pendurada na ponta de uma mola é usado para a introdução do estudo de vibrações. A força para baixo em Newtons (N), na massa é $F_d = mg$, onde m é a massa em quilogramas (Kg) e $g = 9.8$ metros por segundo ao quadrado (m/s^2). A força para cima é $F_u = kx$, onde x é a posição da massa em metros (m) e k é a constante da mola em quilogramas por segundo ao quadrado (Kg/s^2). As duas forças se equilibram quando $mg = kx$. Esta é a posição de equilíbrio da massa, pois respeitando esta condição não há tendência para a massa se mover.

(a) Qual a posição de equilíbrio da massa em termos das outras variáveis?

Resposta: _____

(b) Se houver um pequeno deslocamento da massa para fora de seu ponto de equilíbrio, haverá tendência e a massa vai se mover. A equação diferencial para a posição da massa, a qualquer momento futuro, é encontrada quando aplicamos a segunda lei de Newton para o movimento. A equação diferencial é $m \ddot{x}(t) = m \cdot g - k \cdot x(t)$. Resolva a equação diferencial e escreva a solução aqui.

Resposta: _____

(c) Existem duas constantes de integração. Para solucionar o problema completamente, precisamos fornecer alguma informação a respeito da posição e velocidade da massa em algum instante. Vamos considerar que estas condições iniciais sejam $x(0) = m \cdot g / h$, $\dot{x}(0) = 0$. A última equação é a maneira de dizer ao Maple que $dx/dt = 0$ em $t = 0$. Solucione a equação diferencial incluindo estas condições.

Resposta: _____

(d) Explique a solução em (b). Por que a solução não é uma função de tempo?

Resposta: _____

(e)Mude uma das condições iniciais para $x(0) = 2\text{mg/h}$ e solucione a equação novamente.

Resposta: _____

(f)Examine o coeficiente de t na solução (e). O número dentro do radical é real ou complexo?

Resposta: _____

(g)O Maple procura a solução mais geral baseado nas informações dadas. Já que você sabe que m , k e g são números positivos reais, dê esta informação ao Maple, emitindo os comandos, `>assume(m>0); assume(k>0); assume(g>0);`. Simplifique a solução em (e) após fazer estas determinações.

Resposta: _____

(h)Descreva a solução (g). As oscilações continuam indefinidamente?

Resposta: _____

(i)Adicione um termo de amortecimento da forma $-q \cdot \text{diff}(x(t), t)$ ao lado esquerdo de deq93 . Este termo é uma força retrógrada que é proporcional à velocidade. Solucione a equação diferencial usando as mesmas condições iniciais de (e).

Resposta: _____

(j)Até agora você esteve lidando com soluções simbólicas. Ache uma solução numérica para a equação em (g)substituindo estes valores: $m = 10\text{Kg}$, $g = 9.8\text{m/s}^2$, $k = 0.1\text{Kg/s}^2$, e $q = 0.1\text{Kg/s}^2$. Desenhe o gráfico da solução aqui.

Resposta: _____

(k)Compare a frequência de oscilação em (e) e (j). Para determinar a frequência de oscilação para a solução (j), uma das maneiras é medir o tempo de uma oscilação completa no gráfico. Veja se você consegue inventar diferentes maneiras de medir precisamente.

Resposta: _____

(l)Descreva a característica geral de uma oscilação amortecida observando o plot em (j). Certifique-se de ter escolhido um intervalo de tempo apropriado para o plot, de forma que a

natureza da solução esteja claramente visível. Qual é a boa escolha para o intervalo de tempo?

Resposta:_____